Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 26.05.2009

5. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 11: Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, T eine positive feste reelle Zahl und $R \in \mathcal{L}_1(K)$. Wir betrachten einen R-Wienerprozess W mit Filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. In der Vorlesung haben wir das stochastische Integral mit einer K-wertigen Brown'schen Bewegung als Integrator als eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Int} : \mathcal{P}_T \to \mathcal{M}_T^2(K)$$

definiert, wobei

$$\mathcal{P}_T := \{\Phi : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{L}_2^R \mid \Phi \text{ ist vorhersagbar und } \|\Phi_t\|_{\mathcal{P}_T} < \infty\}$$

und $\|\Phi\|_{\mathcal{P}_T}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{Tr}(\Phi_t R \Phi_t^*)\mathrm{d}t\right]$. Ziel dieser Aufgabe ist die Fortsetzung der Abbildung Int im Raum

$$\mathcal{N}_W(0,T;H) = \left\{\Phi : [0,T] \times \Omega \to \mathcal{L}_2^R \;\middle|\; \Phi \text{ ist vorhersagbar und } \mathbb{P}\left[\int_0^T \|\Phi\|_{\mathcal{L}_2^R}^2 \mathrm{d}t < \infty\right] = 1\right\}.$$

Zu diesem Zweck, zeigen Sie:

a) Sei $\Phi \in \mathcal{P}_T$ und τ eine $\mathcal{F}_t$ Stoppzeit mit $\mathbb{P}[\tau \leq T] = 1$. Dann existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, unabhängig von $t \in [0,T]$ mit

$$\int_0^t 1_{(0,\tau]}(s)\Phi_s \mathrm{d}W_s = \int_0^{t\wedge\tau} \Phi_s \mathrm{d}W_s.$$

Gehen Sie wie folgt vor:

i) Zeigen Sie zuerst die Aussage für $\Phi \in \mathcal{S}_T(K_R, H)$ und τ eine simple Stoppzeit der Form

$$\tau = \sum_{j=0}^n a_j 1_{A_j}$$

mit $0 \leq a_j < a_{j+1} \leq T$ und $A_j = \{\tau = a_j\} \in \mathcal{F}_{a_j}$.

ii) Sei jetzt τ eine beliebige Stoppzeit mit $\mathbb{P}[\tau \leq T] = 1$. Konstruieren Sie eine Folge von simplen Stoppzeiten τ_n mit $\tau_n \downarrow \tau$ für $n \to \infty$ und benutzen Sie diese Folge um die Aussage für beliebige Stoppzeiten zu erweitern.

iii) Nutzen Sie die Dichtheit von $\mathcal{S}_T(K_R, H)$ in $\mathcal{P}_T$, um Punkt **a)** zu zeigen.

b) Das stochastische Integral für $\Phi \in \mathcal{N}_W(0,T;H)$ ist wohldefiniert. Gehen Sie wie folgt vor:

i) Definieren Sie die Stoppzeit

$$\tau_n := \inf\left\{t \in [0,T] \;\middle|\; \int_0^t \|\Phi_s\|_{\mathcal{L}_2^R}^2 \mathrm{d}s > n\right\} \wedge T$$

und zeigen Sie dass τ_n eine wachsende Folge von Stoppzeiten bezüglich $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass die Prozesse $1_{(0,\tau_n]}\Phi$, $n \in \mathbb{N}$, vorhersagbar sind.

Bitte wenden

iii) Definieren Sie für $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \Phi_s \mathrm{d}W_s := \int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi_s \mathrm{d}W_s,$$

mit n so gewählt, dass $\tau_n \geq t$. Wegen Punkt **a)**, für $m < n$ und $t \in [0,T]$ gilt

$$\int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t 1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi_s \mathrm{d}W_s$$

$\mathbb{P}$-f.s. auf $\{\tau_m \geq t\} \subset \{\tau_n \geq t\}$. Zeigen Sie, dass die obige Definition unabhängig von der Wahl der Stoppzeit ist.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 09.06.2009