BEWEIS DER EXISTENZ VON MILDEN LÖSUNGEN (VORLESUNG VOM 18.06.2009)

Gegeben sei die SPDE

$$\mathrm{d}u(t) = \big(Au(t) + f(t)\big)\mathrm{d}t + B\mathrm{d}W(t) \quad t > 0 \quad u(0) = u_0, \tag{1}$$

wobei $A : D(A) \subset H \to H$, und $B : K \to H$ lineare Operatoren sind, sowie f ein H-wertiger Prozess. Um die milde Lösung definieren zu können, fordern wir

- **(A1):** Generatoreigenschaft des Operators $A \equiv A_t$, mit zugeöriger C_0-Halbgruppe $S \equiv \{S(t),\ t \geq 0\}$, sowie $B \equiv B(\omega) \in \mathcal{L}(K, H)$.
- **(A2):** Vorhersagbarkeit des Prozesses f, mit Bochner-integrierbaren Pfaden auf einem beliebigen Zeitintervall $(0, T)$, sowie schliesslich $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit von u_0,
- **(A3):** dass W ein H-wertiger R-Wienerprozess ist, mit $R \in \hat{\mathcal{L}}_1^+$

Satz 1. *Seien* **(A1)**-**(A3)** *erfüllt. Ausserdem gelte*

$$\int_0^T \mathrm{Tr}\,[S(r)BRB^*S^*(r)]\,\mathrm{d}r < \infty.$$

Dann besitzt (1) *genau eine starke Lösung, die durch folgende Formel gegeben ist,*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t S(t-s)B\mathrm{d}W(s) \quad \forall t \geq 0.$$

Beweis. *Schritt 1: Reduktion von* (1) *auf den Fall* $f \equiv 0$ *und* $u_0 \equiv 0$. Die Linearität des Problems erlaubt eine Zerlegung $u = u_1 + u_2$, mit

$$\mathrm{d}u_1(t) = Au_1(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}t \quad t > 0, \quad u_1(0) = u_0, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}u_2(t) = Au_2(t)\mathrm{d}t + B\mathrm{d}W(t) \quad t > 0, \quad u_1(0) = 0. \tag{3}$$

Die deterministische Halbgruppentheorie liefert eindeutige Lösbarkeit von (2) (Vorlesung vom 12.06.2009). Daher müssen wir nur die Lösbarkeit von (3) untersuchen. Im folgenden Schritt weisen wir nach, dass $W_A \equiv \{W_A(t),\ t \geq 0\}$ Lösung von (3) ist.

Schritt 2: W_A *löst* (3). Wir zeigen, dass

$$\int_0^t (W_A(s), A^*\zeta)\,\mathrm{d}s = (W_A(t), \zeta) - (BW(t), \zeta) \quad \forall \zeta \in D(A^*) \tag{4}$$

erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
&(5) \qquad \int_0^t (W_A(s), A^*\zeta)\,\mathrm{d}s &&= \int_0^t \left(\int_0^t \chi_{[0,s]} S(s-r) B \mathrm{d}W(r), A^*\zeta\right) \mathrm{d}s \\
&(6) &&= \int_0^t \left(\int_r^t B^* S^*(s-r) A^*\zeta \mathrm{d}s, \mathrm{d}W(r)\right) \\
&(7) &&= \int_0^t \left(\int_r^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[B^* S^*(s-r)\zeta\right] \mathrm{d}s, \mathrm{d}W(r)\right) \\
&(8) &&= \int_0^t \big(B^* S^*(t-r)\zeta, \mathrm{d}W(r)\big) - \int_0^t \big(B^*\zeta, \mathrm{d}W(r)\big).
\end{aligned}
$$

Im 1. Schritt haben wir die Definition des stochastischen Faltungsintegrals benutzt und im 2. die stochastische Version des Theorems von Fubini. Im 3. und 4. Schritt haben wir die Formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(S(t)x\big) = S(t)Ax$ bzw. die Identität $S(0) = \mathbb{I}$ angewendet. Damit folgt (4), und somit ist $u = u_1 + u_2$ Lösung von (1).

Schritt 3: Eindeutigkeit. Siehe Aufgabeblatt 7 (Die Lösung wird auf die Vorlesungswebseite gestellt). $\square$