Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 20. Juni 2011

8. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 18:

In der Vorlesung haben wir einen Satz über die Konvergenz der Projektion $\mathbb{P}_h$ vorgestellt (vgl. Satz 67), wonach gilt

$$\|P_h\widetilde{u} - \mathbb{P}_h(\widetilde{u})\|_{L^2(0,\tau;U)} \leq C_\ell \tau^{m+1} \|\widetilde{u}\|_{L^2(0,\tau;U)}\,.$$

Diese Abschätzung sichert das Bramble-Hilbert Lemma (vgl. Satz 63), sobald eine Stabilitätseigenschaft für $Id - \mathbb{P} : W^{\ell+1,2}(0,\tau;U_h) \to \mathscr{P}(0,\tau;U_h)$ sichergestellt ist. Zeigen Sie daß folgende hierfür ausreichende Abschätzung gilt:

$$\mathbb{P}_h(\widetilde{u}_h)_{L^2(0,\tau;U)} \leq C\Big(\|\widetilde{u}_h\|_{C([0,\tau];U)} + \|\widetilde{u}_h\|_{L^2([0,\tau];U)}\Big) \quad \forall\, \widetilde{u}_h \in C([0,\tau;U_h])\,. \tag{1}$$

Nachfolgend betrachten wir $\mathbb{P}_h \equiv \mathbb{P}_h^c$. Gehen Sie zum Nachweis von (1) in folgende Schritte vor.

(i) Zeigen Sie
$$\|\mathbb{P}_h^c(\widetilde{u}_h)\|_{\mathscr{P}_\ell(0,\tau;U_h)} \leq 2\|\widetilde{u}\|_{C([0,\tau];U_h)} + \|\widetilde{u}\|_{L^2{}_\ell(0,\tau;U_h)}$$
wobei der Polynomraum $\mathscr{P}_\ell(0,\tau;U_h)$ mit folgender Norm versehen ist
$$\|\widetilde{w}_h\|_{\mathscr{P}_\ell(0,\tau;U_h)} := \sqrt{\tau}\Big(\|\widetilde{w}_h(0)\|_U + \|\widetilde{w}_h(\tau)\|_U\Big) + \|\Pi_h^{\ell-2}(\widetilde{w}_h)\|_{L^2(0,\tau,U)} \quad \forall\, \widetilde{w}_h \in \mathscr{P}_\ell\big((0,\tau];U_h\big).$$
Hierbei ist $\Pi_h^{\ell-2} : L^2(0,\tau;U_h) \to \mathscr{P}_{\ell-2}(0,\tau;U_h)$ die in Lemma 66 genannte orthogonale Projektion.

(ii) Damit reicht der Nachweis aus von
$$\|\widetilde{w}_h\|_{L^2(0,\tau;U_h)} \leq C\|\widetilde{w}_h\|_{\mathcal{P}_\ell(0,\tau;U_h)} \quad \forall\, \widetilde{w}_h \in \mathscr{P}_\ell\big((0,\tau];U_h\big).$$
Hierzu verifiziere man sukzessiv

$(\text{ii})_1$ Zeigen Sie Normeigenschaften von
$$\|p\|_{\mathscr{P}_\ell(0,\tau;U_h)} := \Big(\|p(0)\|_U + \|p(1)\|_U\Big) + \|\Pi_h^{\ell-2}(p)\|_{L^2(0,1)} \quad \forall\, p \in \mathscr{P}_\ell(0,1)\,.$$

$(\text{ii})_2$ Zeigen Sie
$$\|\widehat{w}_h\|_{L^2(0,1;U_h)} \leq C\|\widehat{w}_h\|_{\mathscr{P}_\ell(0,1;U_h)} \quad \forall\, \widehat{w}_h \in \mathscr{P}_\ell(0,1;U_h),$$
indem Sie die Darstellung
$$\widehat{w}_h(t) := \sum_{i=0}^{\ell} \widehat{p}_i(t)\widehat{w}_i\,,$$
mit $\{\widehat{w}_i\} \subset U_h$ eine Orthonormalsystem ist.

$(\text{ii})_3$ Zeigen Sie nun mit einem Skalierungsargument (d.h. Koordinatenwechsel von $[0,1]$ auf $[0,\tau]$) die Abschätzung
$$\|\widehat{w}_h\|_{L^2(0,\tau;U_h)} \leq C\|\widehat{w}_h\|_{\mathscr{P}_\ell(0,1;U_h)} \quad \forall\, \widehat{w}_h \in \mathscr{P}_\ell(0,\tau;U_h),$$

Aufgabe 19: Mithilfe des impliziten Eulerverfahrens haben wir gezeigt, daß

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{A}(u) &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_t, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathcal{O}, \end{aligned}$$

für pseudomonotone, semi-koerzive Operatoren $\mathcal{A} : B \to B'$, die eine Wachstumsbedingung genügen, eine schwache Lösung besitzt. Diese Beweisstrategie ist auch als Rothemethode bekannt. Führen Sie einen alternativen Existenznachweis, der auf einer (konformen) finite Elements-Diskretisierung des Problems basiert. Diese Beweisstrategie ist auch als (Faedo-)Galerkinmethode bekannt.

Aufgabe 20: Sei $p \geq 2$. Zeigen Sie, daß eine Lösung $u : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_p(u) &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_t, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathcal{O}, \end{aligned}$$

existiert, wobei $\Delta_p : W_0^{1,p} \to W^{-1,p'}$ durch

$$\Delta_p(u) := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

definiert ist.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 27. 06. 2011.