Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 30. Mai 2011

7. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 16: Sei $\mathcal{T}_h$ eine Triangulierung vom Gebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie: Für eine interpolatorische Quadraturformel $Q_T(\cdot)$ der Ordnung $r \geq d$ auf einer Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ angewendet auf eine Funktion $v \in W^{1,r}(T)$ gilt

$$\left| \int_T v \,\mathrm{d}x - Q_T(v) \right| \leq C h_T^r \int_T |\nabla^r v| \,\mathrm{d}x,$$

mit einer von T und v unabhängigen Quadraturkonstante $C > 0$.

Hinweis: Beweisen Sie die Annahmen des Bramble-Hilbert Lemmas für $L^1(\hat{T})$, wobei $\hat{T}$ die Referenzzelle ist. Benutzen Sie dann die Transformationsformel, um das Ergebnis auf T zu erhalten.

Aufgabe 17: Sei $U \subset H$ ein Hilbertraum und $U_h \subset U$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei

$$\mathbb{U}_\ell^{cG} := \left\{ u_h \in C([0,T; U_h]) \;\middle|\; u_h|_{(t_{n-1},t_n)} \in \mathscr{P}_\ell((t_{n-1},t_n]; U_h) \right\}.$$

Definiere die Projektion $\mathbb{P}_h^c : C^1([0,T]; H) \to \mathbb{U}_\ell^{cG}$ als

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} ([\mathbb{P}_h^c(u)]_t, v_h) \,\mathrm{d}s = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u_t, v_h) \,\mathrm{d}s \quad \forall\, v_h \in \mathscr{P}_{\ell-1}((t_{n-1},t_n]; U_h)$$

für $u \in C^1([0,T]; H)$. Hier ist $\mathbb{P}_h^c u(0) = P_h u(0)$, wobei $P_h : H \to U_h$ die L^2-Projektion ist, und

$$\lim_{t \nearrow t_n} \mathbb{P}_h^c(u)(t) = \lim_{t \searrow t_n} \mathbb{P}_h^c(u)(t).$$

(i) Zeigen Sie

$$\mathbb{P}_h^c(u)(t_n) = P_h(u(t_n)).$$

Hinweis: Induktion über n.

(ii) Benutzen Sie das obige Ergebnis, um die folgende Charakterisierung von $\mathbb{P}_h^c$ anzugeben:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbb{P}_h^c(u), v_h) \,\mathrm{d}s = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u, v_h) \,\mathrm{d}s \quad \forall\, v_h \in \mathscr{P}_{\ell-2}((t_{n-1},t_n]; U_h).$$

- *Hinweis:* Partielle Integration.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 06. 06. 2011.