Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 30. Mai 2011

6. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 16: Wir wollen die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_T, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}_T, \\ u(0) &= u_0 \text{ auf } \mathcal{O}, \end{aligned}$$

mithilfe H_0^1-konformer linearer Finite Elemente im Ort diskretisieren. Hierzu verwenden wir eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von $\mathcal{O}$ mit Gitterweite $h > 0$. Nachfolgend sei stets $f : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt und $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$.

(i) Zeigen, Sie, daß für jedes $h > 0$ genau eine Lösung der Ortsdiskretisierung auf $\mathcal{O}_T$ existiert.

(ii) Formulieren Sie Kriterien, die für die Ortsdiskretisierung ein diskretes parabolisches Maximumsprinzip sicherstellen.

(iii) Sei jetzt $u_0 \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^2(\mathcal{O})$. Weisen Sie folgende Fehlerabaschẗzung nach

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u - u_h\|^2_{L^2(\mathcal{O})} + \int_0^T \|\nabla(u - u_h)\|^2_{L^2(\mathcal{O})} \,\mathrm{d}s \leq C_T h^2.$$

Aufgabe 17: Sei $\big(H, (\cdot,\cdot)_H\big)$ ein Hilbertraum und $T > 0$. Zeigen Sie, daß eine von $\ell \geq 0$ abhängige Konstante $C > 0$ existiert, sodaß die Abschätzung

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;H)} \leq \frac{C}{T}\|u\|_{L^2(0,T;H)} \quad \forall\, u \in \mathcal{P}_\ell(0,T;H)$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie eine Orthonormalbasis $\{\hat{p}_i\}_{i=0}^{\ell}$ von $\mathcal{P}_\ell(0,1)$, und konstruieren Sie damit eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_\ell(0,T)$

Aufgabe 18:

(i) Zeigen Sie, dass für eine stetige und koerzive Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ die Lösung des dG Verfahrens eindeutig ist.

(ii) Lesen und verstehen Sie die Sätze 4.1 und 4.2 über die Existenz einer Lösung des dG Verfahrens aus dem Skript Numerik 1 von R. Rannacher.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 30. 06. 2011.