Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 2. Mai 2011

4. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 10: Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ polygonal, beschränkt, und $u_0 \in H_0^1(\mathcal{O})$, sowie $f \in W^{1,2}(0,T;L^2(\mathcal{O}))$. Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_T, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}_T, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{T}_h$ eine reguläre Triangulierung von $\mathcal{O}$ der Gitterweite $h > 0$, und

$$U_h = \{\varphi_h \in H_0^1(\mathcal{O}) \; ; \; \varphi_{h|_K} \in P_1(K), \; \forall\, K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Betrachte die Finite-Elementen Diskretisierung für alle $t \geq 0$ der Form:

$$\begin{aligned} \big(u_t^h, \varphi_h\big)_{L^2} + \big(\nabla u^h, \nabla\varphi_h\big)_{L^2} &= (f, \varphi_h)_{L^2} \quad \forall\, \varphi_h \in U_h, && (1) \\ \big(u^h(0,\cdot) - u_0(\cdot), \varphi_h\big) &= 0. && (2) \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems.

(ii) Zeigen Sie die Konvergenzabschätzung

$$\left(\int_0^t \|\nabla(u - u^h)(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \leq Ch.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Ritzprojektion $R_h : H_0^1(\mathcal{O}) \to U_h$, definiert durch

$$\big(\nabla[u - R_h u], \nabla\varphi_h\big) = 0 \quad \forall\, \varphi_h \in U_h.$$

(iii) Zeigen Sie die Konvergenzabschätzung

$$\sup_{s\in[0,T]} \sqrt{\tau(s)}\|(u - u^h)(s)\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq Ch^2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ritzprojektion, sowie ein parabolisches Dualitätsargument.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 09. 05. 2011.