Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 27. April 2011

3. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 7 (Freiwillig): Sei $H = L^2(\mathcal{O})$, $A = -\Delta$ mit $D(A) = H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^2(\mathcal{O})$. Ziel dieser Aufgabe ist es, mithilfe des Satzes von Hille-Yosida zu beweisen, daß A auf H eine Halbgruppe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ generiert. Dazu benutzen Sie, daß $D(A)$ dicht in H ist und zeigen Sie,

a) A ist abgeschlossen, d.h. für alle $\{u_k\}_{k\geq 1} \subset D(A)$ mit

$$\big(u_k \to u,\ Au_k \to v\ (k \to \infty)\big)$$

folgt $u \in D(A)$ und $v = Au$.
Hinweis: Benutzen Sie die Regularitätstheorie für elliptische Operatoren, um zu zeigen, daß $\{u_k\}_{k\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $H^2(\mathcal{O})$ ist.

b) $(0, \infty) \subset \varrho(A)$. Dazu betrachten Sie das Problem

$$(\lambda I + A)u = f \quad \forall\, \lambda \in (0, \infty)$$

und argumentieren Sie, daß für alle $f \in L^2(\mathcal{O})$ eine eindeutige Lösung $u \in D(A)$ existiert.

c) Beweisen Sie, daß

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\|_{L(H)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Aufgabe 8: Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ und $a : H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ eine von einem symmetrischen Operator $A : H_0^1(\mathcal{O}) \to H^{-1}(\mathcal{O})$ induzierte $H_0^1(\mathcal{O})$-koerzive und stetige Bilinearform. Sei $u \in L^\infty\big(0, T; H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^2(\mathcal{O})\big) \cap W^{1,\infty}\big(0, T; L^2(\mathcal{O})\big)$ die starke Lösung von

$$(u_t, v) + a(u, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\mathcal{O}),$$

mit Anfangsdatum

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^2(\mathcal{O})$$

und

$$f, f_t, f_{tt} \in C(0, T; L^2(\mathcal{O})).$$

Diese soll mithilfe des nachfolgenden Crank-Nicolson-Verfahrens für das äquidistante Zeitgitter $I_k := \{t_n\}_{n\geq 0}$ approximativ bestimmt werden: $\{u^{n+1}\}_{n\geq 0} \subset H_0^1(\mathcal{O})$ löse

$$\frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n, v) + \frac{1}{2} a\Big(u^{n+1} + u^n, v\Big) = \frac{1}{2}\Big(f^{n+1} + f^n, v\Big) \quad \forall\, v \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Zeigen Sie, daß

$$\max_{1\leq n\leq N} \tau_n \|u(t_n) - u^n\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq Ck^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Gleichung für $e^m = u(t_{m+1}) - u^{m+1}$

$$\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n, v) + \frac{1}{2} a\Big(e^{n+1} + e^n, v\Big) = \Big(R^n(u), v\Big) \quad \forall\, v \in H_0^1(\mathcal{O}),$$

mit

$$R^{m+1}(u) = \frac{1}{k}\int_{t_m}^{t_{m+1}} \Big[\beta_m(s)u_{ttt}(s) + (\alpha_m(s) - \beta_m(s))Au_{tt}\Big]\,\mathrm{d}s,$$

wobei

$$\alpha_m(s) = \frac{1}{12}(t_{m+1} - s)(s - t_m), \quad \beta_m(s) = \frac{1}{2}\min\left\{(t_{m+1} - s)^2, (s - t_m)^2\right\}.$$

Bemerkung: Gilt $u_0 \in H_0^1(\mathcal{O})$, kann nur

$$\max_{1\le n\le N} \|u(t_m) - u^m\|_{L^2(\mathcal{O})} = o(k)$$

sichergestellt werden; optimale Konvergenz kann mithilfe gestrecktes Zeitgitter sichergestellt werden.

Aufgabe 9: In der Vorlesung wurden starke Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_T, & (1)\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}_T, & (2)\\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{auf } \mathcal{O}, & (3) \end{aligned}$$

für $f \in C^\infty([0,T], L^2(\mathcal{O}))$ mithilfe des impliziten Eulerverfahrens angenähert; die Anfangsregularität von u_0 war bei der Wahl der Zeitgitter maßgeblich, um optimale Konvergenz zu sichern.

Zeigen Sie:

(a) Falls $u_0 \in D(A)$, gilt auf gleichmässigem Zeitgitter:

$$\max_{1\le n\le N} \|u(t_n) - u^n\|_H \le Ck.$$

(b) Falls $u_0 \in H$, gilt auf gleichmässigem Zeitgitter:

$$\max_{1\le n\le N} \tau_n\|u(t_n) - u^n\|_H \le Ck.$$

(c) Falls $u_0 \in H$, gilt auf gestrecktem Zeitgitter:

$$\max_{1\le n\le N} \sqrt{\tau_n}\|u(t_n) - u^n\|_H \le Ck.$$

Besprechung der Aufgaben 7 und 8 in der Übungsstunde am 02. 05. 2011.

Besprechung der Aufgabe 9 in der Übungsstunde am 09. 05. 2011.