Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 19. April 2011

2. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 5: Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\mathcal{O}))$, und $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$. In der Vorlesung wurde die Wohlgestelltheit des Problems

$$\begin{aligned} u_t + Lu &= f && \text{in } \mathcal{O}_T, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \mathcal{O}, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \tag{1}$$

mit symmetrischem L gezeigt. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Beweis auf unsymmetrische Operatoren L zu erweitern. Hierzu betrachten wir den Operator

$$Lu(t, \mathrm{x}) = -\mathrm{div}(\mathbf{A}(t, \mathbf{x})\nabla u(t, \mathbf{x})) + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla u(t, \mathbf{x}) + c(t, \mathbf{x})u(t, \mathbf{x}),$$

mit $\mathbf{A} \in L^\infty(\mathcal{O}_T; \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mathbf{b} \in L^\infty(\mathcal{O}_T; \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty(\mathcal{O}_T, \mathbb{R})$, und nehmen an, daß ein $\theta > 0$ existiert, sodaß

$$\xi^T \mathbf{A}(t, \mathbf{x})\xi \geq \theta|\xi|^2, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{O}_T, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definiere die (nicht symmetrische) Bilinearform

$$a(u, v) := \int_{\mathcal{O}} \Big[(\nabla v)^T \mathbf{A}\nabla u + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + cuv\Big]\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

(i) Zeigen Sie, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ und $C_3 \geq 0$ existieren, mit

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}, \tag{2}$$

$$C_2 \|u\|^2_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq a(u, u) + C_3 \|u\|^2_{L^2(\mathcal{O})}. \tag{3}$$

(ii) Sei $k > 0$ und ein Zeitgitter $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_m = T\}$, mit $t_i = ik$ gegeben. Definiere

$$f^m(\cdot) = \frac{1}{k} \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(s, \cdot)\, \mathrm{d}s$$

und zeigen Sie, daß für die stückweise konstante Interpolation $\mathcal{F}_k^+$ es gilt

$$\mathcal{F}_k^+ \to f, \quad \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{O})) \quad (k \to 0).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f \mapsto \mathcal{F}_k^+$ von $L^2(0, T, H^{-1}(\mathcal{O}))$ in sich selbst stetig ist. Dann genügt, die Aussage für ein f aus einem dichten Teilraum von $L^2(0, T, H^{-1}(\mathcal{O}))$ zu zeigen.

Bemerkung: Diese Approximation kann benutzt werden, wenn die Funktion $f : [0, T] \to H^{-1}(\mathcal{O})$ nicht punktweise in $[0, T]$ definiert ist.

(iii) Betrachten Sie das implizite Euler-Schema mit Zeitschritt $k > 0$: Sei $u^0 := u_0 \in L^2(\mathcal{O})$. Für gegebene $u^{m-1} \in H_0^1(\mathcal{O})$ und $m \geq 1$, finde $u^m \in H_0^1(\mathcal{O})$ gemäß

$$\frac{1}{k}(u^m - u^{m-1}) + Lu^m = f^m \quad \text{in } \mathcal{O}. \tag{4}$$

Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Folge $\{u^m\}_{m\geq 1} \subset H_0^1(\mathcal{O})$ mithilfe des Satzes von Lax-Milgram. Welche Bedingung muss $k > 0$ erfüllen, um die Annahmen vom Lax-Milgram sicherzustellen?

(iv) Betrachten Sie die stückweise konstante, bzw. stückweise affine Interpolation

$$\mathcal{U}_k^+ : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}, \quad \text{bzw. } \mathcal{U}_k : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R},$$

aus der Vorlesung. Leiten Sie von $k > 0$ unabhängige Schranken für $\mathcal{U}^+ : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}$ in der $L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O}))$-Norm, und für die Zeitableitung $\mathcal{U}_k' : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$.

(v) Zeigen Sie

$$\|\mathcal{U}_k^+ - \mathcal{U}_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))} = \sqrt{\frac{k}{3}} \left(\sum_{m=1}^{M} \|u^m - u^{m-1}\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2},$$

und benutzen Sie dieses Ergebnis, um

$$\mathcal{U}_k^+ - \mathcal{U}_k \to 0 \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\mathcal{O}))) \quad (k \to 0)$$

zu beweisen.

(vi) Konstruieren Sie durch Limesübergang $k \to 0$ schwache Lösungen von (1).

(vii) Zeigen Sie Eindeutigkeit derselben.

Aufgabe 6: Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ polyhedral, beschränkt, und $T > 0$ fest. Wir wollen alternativ zum Beweis in der Vorlesung schwache Lösungen $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\mathcal{O})) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$ des Problems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u &= f \quad \text{in } \mathcal{O}_T, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{in } \mathcal{O}, \end{aligned} \tag{5}$$

konstruieren, mit $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3$, und $f \in L^2(0,T,H^{-1}(\mathcal{O}))$, indem wir eine konforme Finite-Elemente Methode mit $U_h \subset H_0^1(\mathcal{O})$ verwenden: Wir suchen also eine Lösung $u_h \in C([0,T];U_h)$ mit der Darstellung

$$u_h(t,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i(t)\phi_i(\mathbf{x}), \quad \forall (t,\mathbf{x}) \in \mathcal{O}_T, \tag{6}$$

wobei $\{\phi_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,N(h)\} \subset U_h$ Basisfunktionen bzgl. der regulären Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von $\mathcal{O}$ sind.

(i) Geben Sie eine derartige *räumliche* Semi-Diskretisierung von (6) an und weisen Sie Lösbarkeit nach, indem Sie die Darstellung (6) verwenden.

(ii) Leiten Sie von $h > 0$ unabhängige Schranken für $\mathbf{u}_h : \mathcal{O}_T \to \mathbb{R}$ her in den Normen von $L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O}))$ und $L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$.

(iii) Konstruieren Sie durch Limesübergang $h \to 0$ schwache Lösungen von (5).

Hinweis: Die Funktionen mit der Form

$$v_h(t,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N(h)} \beta_i(t)\phi_k(\mathbf{x}),$$

mit $\{\beta_i\}_{i=1}^{N(h)} \subset C^\infty([0,T],\mathbb{R})$ sind dicht in $L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O}))$.

(iv) Für die so konstruierte Lösung $u \in L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{O})) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\mathcal{O}))$, benutzen Sie eine geeignete Testfunktion, um zu zeigen, dass $u(0) = u_0$.

(v) Zeigen Sie Eindeutigkeit derselben.

Hinweis: Gehen Sie gemäß dem Programm im Buch von Evans, pp. 353 ff vor.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 09. 05. 2011.