Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl Tübingen, den 11. April 2011

1. Übungsblatt zur Numerik partieller und stochastischer Differentialgleichungen II

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Leiten Sie die Fundamentallösung $\Phi(t, \mathbf{x})$ von (1) her, indem Sie die folgenden Schritte durchführen.

a) Setzen Sie $u(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{\mathbf{x}}{t^b}\right)$, mit $\alpha, \beta > 0$, in (1) ein.

b) Benutzen Sie eine geeignete Wahl des Parameters β und eine Substitution $\mathbf{y} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ um die Gleichung

$$\alpha v(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot Dv(\mathbf{y}) + \Delta v(\mathbf{y}) = 0 \tag{2}$$

zu erhalten.

c) Nehmen Sie an, daß v radialsymmetrisch ist, das heißt, $v(\mathbf{y}) = w(|\mathbf{y}|)$ für ein $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, um Gleichung (2) auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\alpha w + \frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} w + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} w + \frac{n-1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} w = 0$$

zu reduzieren ($r = |y|$).

d) Wählen Sie $\alpha = \frac{n}{2}$ und nehmen Sie an, daß

$$\lim_{r \to \infty} w = 0, \quad \lim_{r \to \infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} w = 0\,,$$

um die Differentialgleichung zu lösen. Die Konstante, die noch zu bestimmen ist, soll so gewählt werden, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}x \equiv 1.$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= g \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Definiere

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}\,. \tag{4}$$

Nehmen Sie an $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für das durch (4) definierte u zeigen Sie

a) $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$,

b) $u_t(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) = 0$, für $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$,

c) $\lim_{\substack{(t,\mathbf{x}) \to (0,\mathbf{x}^0) \\ t>0}} u(t, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}^0)$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\Phi(t, \mathbf{x}) \in C^\infty([\eta, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, für alle $\eta > 0$. Um Punkt c) zu zeigen, wählen Sie $\delta > 0$ mit

$$|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon \quad \text{für } |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < \delta, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

und betrachten Sie die Integraldarstellung von $|u(t, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x}^0)|$ auf $B(\mathbf{x}^0, \delta)$ und $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)$. Um den zweiten Term abzuschätzen, zeigen und benutzen Sie, dass für $\mathbf{x}$ mit $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$, es gilt $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0|$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{x}^0, \delta)$, und die Polarkoordinaten.

Aufgabe 3: Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Sei

$$u(t,\mathbf{x};s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s,\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y},s)\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

die Lösung vom Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(\cdot;s) - \Delta u(\cdot;s) &= 0 \qquad \text{in } (s,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u &= f(\cdot;s) \quad \text{auf } \{t=s\}\times\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Definiere

$$u(t,\mathbf{x}) = \int_0^t u(t,\mathbf{x};s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(s,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}s. \tag{6}$$

Sei $f \in C_2^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass für u definiert in (6) es gilt:

a) $u \in C_2^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$,
b) $u_t(t,\mathbf{x}) - \Delta u(t,\mathbf{x}) = f(t,\mathbf{x})$, für $x\in\mathbb{R}^n, t>0$,
c) $\lim_{\substack{(t,\mathbf{x})\to(0,\mathbf{x}^0)\\ t>0}} u(t,\mathbf{x}) = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie Punkt a) um zu berechnen

$$\begin{aligned} u_t(t,\mathbf{x}) - \Delta u(t,\mathbf{x}) &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,\mathbf{y}) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f(t-s,\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] \mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,\mathbf{y}) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f(t-s,\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] \mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,\mathbf{y}) f(0,\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K\,. \end{aligned}$$

Benutzen Sie partielle Integration auf J_ε, und bestimmen Sie den Limes $\varepsilon\to 0$ wie in Aufgabe 2.

Bemerkung: Die obige Methode wird Prinzip von Duhamel genannt und wird für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzt. Gegeben sei die Gleichung

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \quad t>0, \tag{7}$$
$$y(0) = y_0, \tag{8}$$

mit $a\in\mathbb{R}$. Dann löst

$$y(t) = \exp(-at)\left[\int_0^t \exp(as) f(s)\,\mathrm{d}s + y_0\right]$$

(7)-(8), wobei $z(t;s) := \exp(a(s-t))f(s)$ die Lösung von

$$z'(t;s) + az(t;s) = 0, \quad t>s, \tag{9}$$
$$z(s;s) = f(s), \tag{10}$$

ist.

Aufgabe 4: Benutzen Sie Aufgaben 2 und 3, um eine Formel für die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u &= g \quad \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

zu finden.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 18. 04. 2011.