

14. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 44 (Lektüreaufgabe):

In Evans, S. 349-358, wird ein schwaches Lösungskonzept für die Wärmeleitungsgleichung eingeführt. Lesen Sie die angegebenen Seiten und geben Sie einen Beweis für die eindeutige Existenz solcher Lösungen mithilfe der dort behandelten Methoden.

Aufgabe 45 (Wärmeleitung im geschlossenen Draht):

Gesucht wird die Temperaturverteilung $u(x, t)$ in einem geschlossenen, dünnen, wärmeisolierten Draht der Länge L mit Temperaturleitfähigkeit $D > 0$. Die Anfangstemperatur $u(x, 0) = u_0(x)$ sei 1 für $0 \leq x \leq L/2$ und 0 für $L/2 < x < L$. $u(x, t)$ genügt somit folgenden Zwangsbedingungen:

- (1) Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x \in (0, L), t > 0$),
- (2) Randbedingung: $u(L, t) = u(0, t)$ ($t > 0$),
- (3) Anfangsbedingung: $u(x, 0) = u_0(x)$ ($x \in (0, L)$).

Bestimmen Sie mittels des Separationsansatzes Basislösungen, welche (a) und (b) erfüllen. Superponieren Sie dann diese Basislösungen, um auch noch Bedingung (c) zu erfüllen.