Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 26. 1. 2009

13. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 41:

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes über numerische Integration aus der Vorlesung. Zu zeigen ist also folgende Abschätzung:

$$\|u - \tilde{u}_h\| <= ch^{\min\{m, r+3-m\}} \|u\|_{H^m},$$

mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus der Vorlesung.

Hinweis: Verwenden Sie ein Dualitätsargument: Sei $z \in V$ die (eindeutige) Lösung des Hilfsproblems

$$-\nabla \cdot (a \nabla z) = u_h - \tilde{u}_h \text{ in } \Omega, \quad z = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Wegen Glattheit von a und Konvexität von Ω gilt $z \in H^2(\Omega)$ und $\|z\|_{H^2} <= c\|u_h - \tilde{u}_h\|$. Drücken Sie nun $\|u_h - \tilde{u}_h\|^2$ durch $(l - l_h)(z_h)$ und $(a - a_h)(\tilde{u}_h, z_h)$ aus und schätzen Sie diese beiden Störungsterme analog zum in der Vorlesung behandelten Teil des Beweises ab...

Aufgabe 42:

Beweisen Sie den Satz über den a posteriori L^2-Normfehler aus der Vorlesung. Das Vorgehen ist dabei gleich wie beim Energienormfehler.

Aufgabe 43:

Wir betrachten folgende parabolische ARWA:

$$\partial_t u - \triangle u = f \text{ in } Q_T := \Omega \times I, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=0} = u^0$$

Mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und einem Zeitintervall $I := [0, T]$.
Zeigen Sie: Für die ARWA genügt der Abschneidefehler, der in der Vorlesung betrachteten Differenzenverfahren, folgender Abschätzung für das BDF(2)-Verfahren:

$$\max_{\bar{Q}_T} |\tau_{h,k}^m| \leq \max_{\bar{Q}_T} |\tau_h^m| + \frac{2}{3} k^2 \max_{\bar{Q}_T} |\partial_t^3 u|.$$

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 30. 1. 2009.