

11. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 36:

Die Differentialgleichung $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 998 & -1998 \\ 999 & -1999 \end{pmatrix}$$

werde mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Zeigen Sie: Die exakte Lösung erfüllt $y(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für welche Wahl der Schrittweite h geht die numerische Lösung des expliziten bzw. impliziten Euler-Verfahrens gegen 0 ?

Hinweis: Diagonalisierung von A .

Zur Wiederholung des impliziten bzw. expliziten Euler-Verfahrens kann folgendes Buch empfohlen werden:

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen; von Strehmel, Weiner.

Aufgabe 37:

Für die Systemmatrix A_h einer FE-Diskretisierung für folgende RWA

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

wurde in der Vorlesung für „quasi-gleichförmige“ Triangulierungen $\text{cond}_2(A_h) = O(h^{-2})$ gezeigt.

- (1) Definieren Sie „quasi-gleichförmig“.
- (2) Wie hängt $\text{cond}_2(A_h)$ von Inkreis- bzw. Inkugelradius der Zellen ab, wenn die Triangulierungsfolge nicht „formregulär“ ist?
- (3) Wie hängt $\text{cond}_2(A_h)$ bei 5-Punkt-Diskretisierung auf äquidistantem kartesischem Gitter mit unterschiedlichen Gitterweiten $h_x \neq h_y$ vom Seitenverhältnis h_x/h_y (aspect ratio) ab?

Hinweis: Bestimmen Sie λ_{max} und λ_{min} mittels expliziter Darstellung der 5-Punkte-Matrix.