Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 16. 12. 2008

10. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 33:

Beweisen Sie: Für ein Dreieck T einer Triangulierung, welche die „uniform shape condition" erfüllt ($\sup_{h>0} \max_{T\in T_h} \frac{h_T}{\rho_T} <= c$), gibt es eine Konstante $C = C(\hat{P}, \hat{T}, p, q)$ sodass

$$\|v\|_{W_p^l(T)} <= Ch^{m-l+n/p-n/q} \|v\|_{W_q^m(T)}$$

für alle $v \in P(T) \subset W_p^l(T) \cap W_q^m(T)$, wobei P ein endlichdimensionaler Teilraum, $1 <= p, q <= \infty$ und $1 <= m <= l$ (und $W_p^k = W^{k,p}$).

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation auf das Referenzelement. Beachten Sie, dass aus der Endlichdimensionalität von $\hat{P}(\hat{T})$ folgt $\|\hat{v}\|_{W_p^l(\hat{T})} <= C\|\hat{v}\|_{L^q(\hat{T})}$ $\forall \hat{v} \in \hat{P}(\hat{T})$ (Äquivalenz der Normen).

Aufgabe 34:

Zeigen Sie nun folgende globale Version obiger Aussage:

Die Triangulierung T_h, $h \in (0, 1]$ des polygonalen / polyedrischen Gebiets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ erfülle die „uniform shape condition". Sei (K, P, N) ein Referenz-FE sodass $P \subseteq W_p^l(K) \cap W_q^m(K)$ mit $1 <= p, q <= \infty$ und $0 <= m <= l$. Für $T \in T_h$ sei $(T, P(T), N(T))$ durch affine Transformation aus dem Referenz-FE hervorgegangen und $V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in P(T)\ \forall T \in T_h\}$. Dann gibt es ein $C = C(p, q)$ sodass

$$\left(\sum_{T\in T_h} \|v\|^p_{W_p^l(T)} \right)^{1/p} <= Ch^{m-l+\min\{0,n/p-n/q\}} \left(\sum_{T\in T_h} \|v\|^q_{W_q^m(T)} \right)^{1/q}$$

für alle $v \in V_h$. (Im Fall $p = \infty$ resp. $q = \infty$ interpretiert man die linke Seite als $\max_{T\in T_h} \|v\|_{W_\infty^l(T)}$ resp. die rechte Seite analog).

Hinweis: Aufgabe 33 und Hölder.

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie optimale $\alpha = \alpha(l, m, p, q)$ und $\beta = \beta(l, m, p, q)$, sodass

$$|v - I_T v|_{W_q^m(T)} <= c\frac{h_T^\alpha}{\rho_T^\beta} |v|_{W_p^l(T)}$$

für $0 <= m <= l$, $1 <= p <= q <= \infty$, $c = c(\hat{P}, \hat{T}, p, q)$ und $v \in W_q^m(T) \cap W_p^l(T)$. (Im Fall $p > q$ gilt die Ungleichung ohnehin).

Hinweis: Das Vorgehen ist analog zum Beweis des speziellen Interpolationssatzes (dort: $p = q = 2$) aus der Vorlesung. Zusätzlich braucht man Sobolev-Abschätzungen (vgl. Evans, Kap. 5.6).

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 9. 1. 2009.