Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 09. 12. 2008

9. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 30:

Die Randwertaufgabe

$$-\triangle u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit (stückweise) kubisch parametrisiertem C^2-Rand $\partial\Omega$ soll mit einem kubischen FE-Ansatz diskretisiert werden.

In diesem Fall gilt für die Lösung u mindestens $u \in H^3(\Omega)$ (i.a. aber $u \notin H^4(\Omega)$) und die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{2+k} <= c\|\triangle u\|_k, \quad k = 0, 1.$$

(1) Geben Sie einen geeigneten Ansatzraum an. Welche Konvergenzordnungen sind dafür bei genügend regulärem u bzgl. der Energienorm (H^1-Seminorm) und der L^2-Norm zu erwarten? Welche Regularität muß man dabei für die Lösung u voraussetzen?

(2) Welche Fehlerordnung läßt sich mit einem Dualitätsargument für den Mittelwert zeigen, dh.

$$\left| \int_\Omega u\,dx - \int_\Omega u_h\,dx \right| <= ch^? \|u\|_3$$

Aufgabe 31:

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Durchmesser h_T und Inkreisradius ρ_T mit $h_T <= c\rho_T$, und sei $I_h v$ die lineare Interpolierende mit den Funktionswerten in den Eckpunkten von T als Knotenwerte. Zeigen Sie:

$$\|v - I_h v\|_{\partial T} <= ch_T^{3/2} \|\nabla^2 v\|_T.$$

Es liegt daher nahe folgendes anzunehmen:

$$\|v - I_h v\|_{\partial T} <= ch_T^{1/2} \|\nabla v\|_T.$$

Kann dies gelten?

Aufgabe 32:

Geben Sie die bestmöglichen h-Potenzen in folgenden Interpolationsabschätzungen für die Lagrange-Interpolation in $P(T) := P_2(T)$ an (bei „regulärer“ Triangulierung):

(1) $\|\nabla^2(v - I_T v)\|_T <= c_i h_T^? \|\nabla^3 v\|_T$

(2) $|(v - I_T v)(a_i)| <= c_i h_T^? \|\nabla^3 v\|_T$ für Knoten a_i

(3) $\|\partial_n(v - I_T v)\|_{\partial T} <= c_i h_T^? \|\nabla^3 v\|_T$

(4) $\|v - I_T v\|_T <= c_i h_T^? \|\nabla^2 v\|_T$.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 19. 12. 2008.