Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 18. 11. 2008

6. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 20:

Formulieren Sie das Ritz-Verfahren mit endlich-dim. Teilräumen geeigneter $H^m(\Omega)$ für die

(1) Neumannsche RWA des Laplace-Operators:

$$-\triangle u = f \text{ in } \Omega, \quad \partial_n u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

(2) Dirichletsche RWA des biharmonischen Operators:

$$-\triangle^2 u := \triangle(\triangle u)) = f \text{ in } \Omega, \quad u = \partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dabei seien Ω und die Daten f, g jeweils genügend regulär.

Zusatzaufgabe (fakultativ): Versuchen Sie, analog zur Vorlesung „Best-Approximations-Aussagen“ herzuleiten.

Aufgabe 21:

Betrachten Sie das Modellproblem

$$-\triangle u = f \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

auf $\Omega := (0,1)^2$, diskretisiert auf einem äquidistanten, kartesischen Gitter mit Gitterweite h mithilfe der FEM mit stückweise bilinearen Ansatzfunktionen. Stellen Sie die zugehörigen Systemmatrizen auf:

(1) mit exakter Integration,

(2) mit der 2-dim. „Tensorprodukt Trapezregel“

$$Q_T(f) := \frac{|T|}{4} \sum_{i=1}^{4} f(a_i), \quad a_i \text{ Eckpunkt der Zelle T.}$$

Aufgabe 22:

In wie weit sind folgende Bedingungen an eine Folge „regulärer“ Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in Dreiecke oder Vierecke äquivalent:

(1) Die Innenwinkel aller $T \in \mathcal{T}_h$ sind gleichmäßig (für T und h) von Null weg beschränkt.

(2) Für Inkreisradius ρ_T und Umkreisradius h_T von T gilt $sup_{T\in\mathcal{T}_h,h>0} h_T/\rho_T \; < \; \infty$.

(3) Für Seiten $\Gamma \subset \partial T$ jedes $T \in \mathcal{T}_h$ gilt $\max_{\Gamma\subset\partial T} |\Gamma| \leq c \min_{\Gamma\subset\partial T} |\Gamma|$ für eine von T unabhängige Konstante c.

Bitte wenden

Aufgabe 23:

Sei $V_h^{(1)} \subset H^1(\Omega)$ der Raum der stückweise linearen FE bzgl. einer regulären Triangulierung von $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$. Die L^2-Projektion $P_h : L^2(\Omega) \to V_h^{(1)}$ ist definiert durch

$$(P_h u, \varphi_h) = (u, \varphi_h) \; \forall \, \varphi_h \in V_h^{(1)},$$

wobei $(u, v) := \int_\Omega uv \, dx$ das L^2-Skalarprodukt.

(1) Leiten Sie eine Fehlerabschätzung für $\|u - P_h u\|_{L^2}$ für $v \in H^2(\Omega)$ her.

(2) Zeigen Sie für die „negative“ Sobolev-Norm folgende Abschätzung:

$$\|u - P_h u\|_{-1} := \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{(u - P_h u, \varphi)}{\|\nabla \varphi\|} \leq c h^3 \|\nabla^2 u\|_{L^2}.$$

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 28. 11. 2008.