Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 11. 11. 2008

5. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 17:

Der Laplace-Operator hat in Polarkoordinaten $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ folgende Form

$$\triangle u(r, \theta) = \left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2\right) u.$$

(1) Für ein $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $S_\omega := \{(r, \theta) : r > 0, \theta \in (0, \omega)\}$ der zugehörige Sektor der (x, y)-Ebene. Zeigen Sie, dass die auf dem Gebiet $G := S_\omega \cap \bar{B}(0, 1)$ definierte Funktion

$$s_\omega(r, \theta) := r^{\pi/\omega} \sin(\theta\pi/\omega)$$

harmonisch ist, d.h. $\triangle s_\omega \equiv 0$, und den Randbedingungen $s_\omega(r, 0) = s_\omega(r, \omega) = 0$ sowie $s_\omega(1, \theta) = sin(\theta\pi/\omega)$ genügt.

(2) Zeigen Sie, dass im Fall $\pi < \omega <= 2\pi$ die ersten Ableitungen dieser Funktion zwar unbeschränkt aber noch (uneigentlich) quadrat-integrabel sind, während diese Integrabilität für die zweiten Ableitungen nicht mehr gilt.

Wie sieht dies im Fall $0 < \omega < \pi$ aus?

Wir haben hier also glatte Randdaten zu einer elliptischen PDE, aber die klassische Lösung ist am Rand nicht regulär.

Aufgabe 18:

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen auf dem offenen Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ in $H^1(\Omega)$ liegen:

(1) $u(x, y) = |x - y|^{1/2}$,

(2) $u(x, y) = \sin(\log(1/r))$, mit $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Hinweis: Prüfen Sie die uneigentliche Riemann-Integrabilität der Ableitungen.

Bitte wenden

Aufgabe 19:

Sei V ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(.,.)_V$ und zugeh. Norm $\|.\|_V$. Gegeben seien eine bilineare und eine lineare Form $a(.,.)$ bzw. $l(.)$ mit

- $|a(v,w)| <= \alpha\|v\|_V\|w\|_V, \quad v,w \in V$ (Beschränktheit)
- $a(v,v) >= \kappa\|v\|_V^2, \quad v \in V$ (V-Elliptizität)
- $|l(v)| <= \beta\|v\|_V, \quad v \in V$ (Beschränktheit)

Dann hat die Variationsgleichung

$$a(u,\varphi) = l(\varphi) \quad \forall\, \varphi \in V$$

nach Lax-Milgram genau eine Lösung $u \in V$. Für endlichdimensionale Teilräume $V_h \subset V$ werden approximative Lösungen $u_h \in V_h$ mittels der Galerkin-Gleichungen bestimmt:

$$a(u_h,\varphi_h) = l(\varphi_h) \quad \forall\, \varphi_h \in V_h.$$

(1) Zeigen Sie hierfür die (eindeutige) Existenz der „diskreten" Lösungen $u_h \in V_h$ und die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_V <= \frac{\alpha}{\kappa} \inf_{\varphi_h \in V_h} \|u - \varphi_h\|_V.$$

(2) Beweisen Sie mittels (a) die Konvergenz der Galerkin-Approximation des Diffusions-Konvektions Problems

$$-\triangle u + \partial_1 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

für $f \in L^2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ regulär.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 21. 11. 2008.