Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 28. 10. 2008

3. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 9:

Betrachten Sie wie in Aufgabe 8 b) die RWA (∗) auf dem Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$,

$$-\triangle u = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega, \tag{$*$}$$

diskretisiert durch das 9-Punkt-Differenzenschema

$$-\bar{\triangle}_h^{(9)} u_h(x,y) = f_h(x,y) := f(x,y) + \frac{1}{12} h^2 \triangle f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_h,$$

mit dem „kompakten" Differenzenoperator

$$\bar{\triangle}_h^{(9)} u(x,y) := \frac{1}{6h^2} \left\{ 4u(x \pm h, y) + 4u(x, y \pm h) + u(x \pm h, y \pm h) - 20u(x,y) \right\}.$$

Gemäß Aufgabe 8 b) hat diese Approximation die Konsistenzordnung $m = 4$.

Zeigen Sie nun folgende Fehlerabschätzung:

$$\max_{P \in \bar{\Omega}_h} |u(P) - u_h(P)| <= c M_6(u) h^4,$$

wobei $M_6(u) := \max_{\bar{\Omega}} \left\{ \left| \partial_x^i \partial_y^j u \right| : i + j = 6 \right\}$.

Hinweis: Verwenden sie die diskrete Greensche Identität und das diskrete Maximumprinzip.

Aufgabe 10:

Setzten Sie in der Problemstellung aus Aufgabe 9 ein allgemeines, glatt berandetes Gebiet Ω in $\mathbb{R}^2$ voraus und betrachten Sie entlang der gekrümmten Randabschnitte die Shortley-Weller-Approximation:

$$-\triangle_h^{(9)} u_h = f + \frac{1}{12} h^2 \triangle f \text{ in } \Omega_h, \quad -\triangle_h^* u_h = f \text{ in } \partial\Omega_h^*, \quad -u_h = g \text{ auf } \partial\Omega_h.$$

Zeigen Sie hierfür analog zu oben die Fehlerabschätzung

$$\max_{P \in \bar{\Omega}_h} |u(P) - u_h(P)| <= c \left\{ M_6(u) h^4 + M_3(u) h^3 \right\}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 11:

Sei A_h die zum 5-Punkte-Operator auf dem Einheitsquadrat gehörende $N \times N$-Matrix (bei zeilenweiser Numerierung der Gitterpunkte mit m Punkten in jeder Zeile). Die $N = m^2$ Eigenvektoren $w^{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 1, \ldots, m$ und die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{\nu\mu}$ von A_h sind gegeben durch:

$$w^{\nu\mu}(x,y) = \sin(\nu\pi x)\sin(\mu\pi y),\ (x,y) \in \Omega_h, \quad \lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{h^2}(4 - 2(\cos(\nu h\pi) + \cos(\mu h\pi)).$$

Zeigen Sie, dass für die Spektralkondition von A_h gilt:

$$\mathrm{cond}_2(A_h) := \frac{\lambda_{\max}(A_h)}{\lambda_{\min}(A_h)} = \frac{4}{\pi^2 h^2} + \mathcal{O}(1)\cdot$$

Aufgabe 12:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ heißt „M-Matrix", wenn ihre Inverse existiert und elementweise nichtnegativ ist. Das 5-Punkte-Differenzenschema (bzw. das Shortley-Weller-Schema) zur Approximation von $(*)$ führt z.B. auf solche Matrizen. Zeigen Sie:

(1) M-Matrizen sind „invers monoton" d.h. für $v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt komponentenweise

$$Av >= Aw\mathbb{R}av >= w.$$

(2) Gilt für A_h aus Aufgabe 11 außerdem $A_h w >= (1, \ldots, 1)^T$ für ein $w \in \mathbb{R}^N$, so folgt bzgl. der Maximalen-Zeilensummen-Norm:

$$\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty <= \|w\|_\infty.$$

(3) Die Systemmatrix A_h des 5-Punkte-Schemas auf dem Einheitsquadrat erfüllt

$$\left\|A_h^{-1}\right\|_\infty <= \frac{1}{8}.$$

Daraus ergibt sich für die l_∞-Kondition von A_h:

$$\mathrm{cond}_\infty(A_h) := \|A_h\|_\infty \left\|A_h^{-1}\right\|_\infty <= h^{-2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil b) und die mittels $w(x,y) := x(1-x)/4 + y(1-y)/4$ gebildete Gitterfunktion.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 7. 11. 2008.