Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 21.10.2008

2. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 5:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wie ist das finite Differenzen-Verfahren für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \,, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{$*$}$$

zu modifizieren, wenn Ω nicht durch Gitterlinien berandet wird (Shortley-Weller)? Diskutieren Sie dies anhand eines Fünf-Punkte-Sternes, durch den der Rand läuft.

Ist die Matrix des Gleichungssystems noch symmetrisch? Gilt noch das diskrete Maximumprinzip?

Aufgabe 6:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, offenes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Gegeben sei die Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} := \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ genau dann Lösung von $(*)$ ist, wenn es folgendes Variationsproblem löst:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + v^2 \right] d(x,y) - \int_\Omega f v d(x,y) - \int_{\partial\Omega} g v d\sigma = \min!$$

für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Aufgabe 7:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, offenes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Betrachten Sie nun die beiden folgenden Randwertaufgaben

(1) $-\triangle u + au = f$ in Ω, $\partial_n u = g$ auf $\partial\Omega$,

(2) $-\triangle u + au = f$ in Ω, $\partial_n u + \alpha u = g$ auf $\partial\Omega$,

mit Konstanten $a > 0$ und $\alpha >= 0$. Zeigen Sie, dass diese RWAn jeweils höchstens eine „klassische“ Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ haben können.

Welches Problem ergibt sich im Fall $a = 0$, d.h. für den reinen Laplace-Operator?

Bitte wenden

Aufgabe 8:

Betrachten Sie die Diskretisierung von $(*)$ auf dem Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$:

(1) Mit dem 9-Punkt-Differenzenschema

$$-\triangle_h^{(9)} u_h(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_h,$$

und dem „gestreckten" Differenzenoperator

$$\triangle_h^{(9)} u(x,y) := \\ \frac{1}{12h^2}\left\{-u(x \pm 2h, y) + 16u(x \pm h, y) - u(x, y \pm 2h) + 16u(x, y \pm h) - 60u(x,y)\right\}.$$

(2) Mit dem 9-Punkte-Differenzenschema

$$-\bar{\triangle}_h^{(9)} u_h(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{12}h^2 \triangle f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_h,$$

und dem „kompakten" Differenzenoperator

$$\bar{\triangle}_h^{(9)} u(x,y) := \frac{1}{6h^2}\left\{4u(x \pm h, y) + 4u(x, y \pm h) + u(x \pm h, y \pm h) - 20u(x,y)\right\}.$$

Zeigen Sie, dass dies Approximationen mit der Konvergenzordnung $m = 4$ sind.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 31.10.2008.