

1. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Erfüllt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ und setzen wir $v(x) := u(Ox)$ für eine orthogonale $n \times n$ -Matrix O , so gilt auch

$$\Delta v = 0.$$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Ist $u \in C(\Omega)$ und $\int_{\Omega} uv \, dx = 0$ für alle $v \in C^1(\bar{\Omega})$, dann ist auch $u = 0$ in Ω .

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie für welche Parameter a die Differentialgleichung

$$au_{xx} + 4u_{xy} + (5 - a)u_{yy} = 0$$

elliptisch ist.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Ist $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung des Minimierungsproblems

$$\int_0^1 f(t, y(t), y'(t)) dt \rightarrow \min!,$$

so ist y Lösung der *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), y'(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y(t), y'(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Besprechung der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.