EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Luca Vantaggio

Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 2026 **Tübingen, 24.06.2026**

Übungsaufgaben 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang r, $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V^T}$ eine Singulärwertzerlegung und $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V\Sigma^+U^T}$ ihre Pseudoinverse. Zeigen Sie folgende Aussagen.

a) Ist A regulär, dann gilt $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A^{-1}}$.

b) Ist $r = n$, dann gilt $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A^TA})^{\mathbf{-1}}\mathbf{A^T}$.

c) $\mathbf{AA}^+$ ist die orthogonale Projektion auf Bild$(\mathbf{A})$.

d) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ ist die orthogonale Projektion auf Kern$(\mathbf{A})^\perp$.

Hinweis: Die orthogonale Projektion P eines Vektorraums V auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ ist definiert durch die Bedingungen $P(\mathbf{v}) \in U$ und $P(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \in U^\perp$ für alle $\mathbf{v} \in V$.

Hinweis: Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt stammen aus einem frei zugänglichen Übungsblatt der Technischen Universität Berlin im Rahmen des Kurses *Numerische Mathematik I* für das Wintersemester 2014/2015.
Link dazu (Stand 18.06.2026):

`https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS14/NumMath1/uebungsblaetter/num_ws14_03.pdf`

Abgabe: Bitte reichen Sie Ihre Lösung bis einschließlich 30.06. um 23:59 Uhr ein.