



## Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 2026

Tübingen, 21.05.2026

### Übungsaufgaben 5

**Aufgabe 1.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische und positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

- $A$  ist invertierbar.
- Für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt  $a_{ii} > 0$ .
- Die Eigenwerte von  $A$  sind reell.
- Die Eigenwerte von  $A$  sind positiv.

**Aufgabe 2.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt Bandmatrix mit Bandbreite  $p + q + 1$ , falls es  $p, q \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $a_{ij} = 0$  für alle  $j > i + p$  und  $i > j + q$  gilt.

Die Zahlen  $p$  und  $q$  bezeichnen also die sogenannten *obere* bzw. *untere Bandbreite*.

Zeigen Sie für eine LR-Zerlegung ohne Pivottierung, sofern durchführbar, dass dann  $l_{ij} = 0$  wenn  $i > j + q$  und  $r_{ij} = 0$  wenn  $j > i + p$  gilt.

**Bemerkung:** Damit bleibt das reduzierte Speicherformat für die Eingänge der Matrix  $A$  in Form weniger Vektoren – mit jeweils einer Dimension, die höchstens  $n$  ist – im Kontext der LR-Zerlegung erhalten. Also tritt im Zuge der LR-Zerlegung kein *fill in* auf.

**Abgabe:** Bitte reichen Sie Ihre Lösung bis einschließlich 02.06. um 23:59 Uhr ein. Wir wünschen Ihnen erholsame Ferien.