EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Luca Vantaggio

Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 2026 **Tübingen, 02.05.2026**

Übungsaufgaben 3

Aufgabe 1. Die Konditionszahl einer invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n0}$ ist definiert als

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) := |||\mathbf{A}||| \cdot |||\mathbf{A}^{-1}|||.$$

Hierbei bezeichnet

$$|||\mathbf{M}||| := \sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{||\mathbf{Mx}||}{||\mathbf{x}||}$$

für jede Matrix $\mathbf{M}$ die von einer beliebigen Vektornorm $||\cdot||$ induzierte Matrizennorm.

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Konditionszahl:

a) Es gilt $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \geq 1$.

b) Sei $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathrm{cond}(\alpha\mathbf{A}) = \mathrm{cond}(\mathbf{A})$.

c) Für die Einheitsmatrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathrm{cond}(\mathbf{I}) = 1$.

Aufgabe 2.

a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch und positiv definit. Leiten Sie einen Algorithmus her, mit dem Sie eine linke untere Dreiecksmatrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$ gilt.

b) Wenn möglich, geben Sie eine entsprechende Zerlegung der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

an oder begründen Sie, warum dies nicht möglich ist.

Bemerkung: Diese Zerlegung heißt *Choleski-Zerlegung* und existiert allgemein für symmetrische, positiv definite Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Einmal erhalten ist es dann leicht möglich, das zugehörige Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ durch Vor- und Rückwärtseinsetzen zu lösen.

Abgabe: Bitte reichen Sie Ihre Lösung bis einschließlich 06.05. um 23:59 Uhr ein.