



Mathematik für Informatik 4: Numerik

Sommersemester 2026

Tübingen, 23.04.2026

Übungsaufgaben 2

Aufgabe 1.

- Berechnen Sie den relativen Fehler der Funktion $\varphi(x) = x^2$. Für welche Maschinengenauigkeiten ε liegt eine Fehlerverstärkung vor, die nicht mehr von Ordnung ε ist?
- Berechnen Sie den relativen Fehler der Funktion $\psi(x) := \exp(x)$. Berechnen Sie den relativen Fehler hierzu exakt und führen Sie anschließend mit dem resultierenden Term eine geeignete Taylor-Entwicklung durch. Benutzen Sie alternativ die Formel aus der Vorlesung für die Kondition des Problems.

Aufgabe 2. Neben einer Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ wird in Kürze in der Vorlesung eine weitere Abbildung relevant sein: die (von einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$) induzierte Matrizenorm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert ist wie folgt:

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen.

- Für die Einheitsmatrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\|\mathbf{I}\| = 1$.
- Für je zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$.
- Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$.
- Für je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
- Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Abgabe: Bitte reichen Sie Ihre Lösung bis einschließlich 28.04. um 23:59 Uhr ein.