EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Benedict Sondershaus

Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25 **Tübingen, 10.07.2025**

Übungsaufgaben 9

Problem 1. Zeigen Sie, daß für den Fehler der *summierten Trapezregel* gilt:

$$\Big|\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + f(b)\Big)\Big| \le \frac{b-a}{12}h^2 \max_{a\le x\le b} |f''(x)|\,,$$

wobei $x_j = a + jh$ und $h = \frac{b-a}{N}$ sind.

Hinweis: Zerlegen Sie $[a,b]$ in die äquidistanten Intervalle $[x_i, x_i+h]$, nutzen Sie dort folgende Aussage über die zur Trapezregel korrespondierende Polynominterpolation:

$$\forall\, x \in [x_i, x_i + h] \qquad \exists\, \xi \equiv \xi_x \in [x_i, x_i+h]: \qquad f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - [x_i + h])$$

und summieren Sie diese auf dem Gesamtintervall auf.

Problem 2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Zur Bestimmung von Nullstellen wird oft wie folgt vorgegangen: wir starten die iterative Bestimmung einer Intervallfolge $\{[a_n, b_n]\}_{n\ge 0} \subset [a,b]$ mit der Setzung

$$a_0 := a \qquad \text{und} \qquad b_0 := b\,.$$

Im $n+1$-ten Schritt bestimmt man dann $f(\frac{a_n+b_n}{2})$: ist diese Zahl > 0, dann ist das neue Intervall definiert mithilfe seiner Grenzen

$$a_{n+1} := a_n \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

Falls $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$ setzen wir

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = b_n\,.$$

a) Begründen Sie, warum f eine Nullstelle haben muß. Kann es auch mehr als eine geben?

b) Der obige Algorithmus liefert eine Folge von Intervallen $\{[a_n, b_n]\}_{n\ge 0}$. Zeigen Sie, daß für die Intervallmitten $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, die durch das Verfahren berechnet werden, folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$|x^* - x_n| \le \frac{b-a}{2^n}\,.$$

Hierbei ist x^* eine Nullstelle von f.

Abgabe: bis zum 17.07.2025.