EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Benedict Sondershaus

Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25 **Tübingen, 26.06.2025**

Übungsaufgaben 7

Problem 1. Für $x \in [-1, 1]$ definieren wir das Tschebycheff-Polynom durch

$$T_n(x) := \cos\big(n \arccos(x)\big) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Zeigen Sie:

a) $T_0(x) = 1$ sowie $T_1(x) = x$, und für $n \geq 1$ gilt die folgende Rekursion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

b) T_n ist ein Polynom vom Grad n, und es gilt $\big|T_n(x)\big| \leq 1$.

c) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$T_n\Big(\cos\frac{k\pi}{n}\Big) = (-1)^k\,.$$

d) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$T_n\Big(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\Big) = 0\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie für den ersten Teil Additionstheoreme des Kosinus. Benutzen Sie für die letzten beiden Teile das Wissen über die Nullstellen und Extremstellen des Kosinus.

Problem 2. Gegeben seien für die Secans Hyperbolicus Funktion $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ die folgenden Werte an den Stellen $\{x_i\}_{i=1}^5 = \{0.9, 0.95, 1., 1.05, 1.1\}$:

$$f(x_1) = 0.697795\,, \quad f(x_2) = 0.672845\,, \quad f(x_3) = 0.648054\,, \quad f(x_4) = 0.623521\,, \quad f(x_5) = 0.599334\,.$$

Bestimmen Sie durch Extrapolation des zentrierten Differenzenquotienten

$$a(h) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

eine Näherung zum Ableitungswert $f'(1)$. Rechnen Sie dabei mit 6 signifikanten Stellen.

Problem 3. Seien $a < b$. Zeigen Sie, daß die Bilinearform, die durch

$$(f, g) := \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

definiert wird, ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ ist.

Abgabe: bis zum 03.07.2025.