



## Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25

Tübingen, 05.06.2025

### Übungsaufgaben 6

**Problem 1.** Zu paarweise verschiedenen reellen Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  sind die Lagrangeschen Polynome  $L_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) definiert durch

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

a) Zeigen Sie, daß  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$  ist und zeigen Sie, daß für  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  das Polynom

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

die Eigenschaft  $p(x_j) = y_j$  hat.

b) Zeigen Sie, daß

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) \equiv 1.$$

c) Zeigen Sie:

$$\sum_{i=0}^n L_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1 & (j = 0) \\ 0 & (1 \leq j \leq n) \\ (-1)^n \prod_{i=0}^n x_i & (j = n + 1). \end{cases}$$

**Hinweis:** Benutzen Sie für den letzten Fall den Fundamentalsatz der Algebra.

**Problem 2.** Zeigen Sie, daß es maximal ein Interpolationspolynom  $p$  vom Grad  $n$  gibt mit  $p(x_i) = y_i$  für vorgegebene Knotenpunkte  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  mit paarweise verschiedenen  $x_i$ .

**Hinweis:** Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

**Problem 3.** Bestimmen Sie die Anzahl der Rechenoperationen (jeweils die Anzahl der Additionen bzw. Multiplikationen), die für die Berechnung eines Interpolationspolynoms in Lagrange-Darstellung nötig sind.

**Abgabe: bis zum 19.06.2025.**