EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Benedict Sondershaus

Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25 **Tübingen, 22.05.2025**

Übungsaufgaben 5

Problem 1. Gegeben sind die folgenden Meßdaten:

$$(x_1, y_1) = (1, 2)\,, \quad (x_2, y_2) = (2, 3)\,, \quad (x_3, y_3) = (3, 5)\,, \quad (x_4, y_4) = (4, 3)\,.$$

Bestimmen Sie die Ausgleichgerade dieser Meßdaten im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mithilfe der Gaußschen Normalengleichung.

Problem 2. Gegeben sind die folgenden Meßdaten

$$(x_1, y_1) = (0, 3)\,, \quad (x_2, y_2) = (1, 0)\,, \quad (x_3, y_3) = (2, 8)\,.$$

Angenommen, Sie möchten mit den gegebenen Daten eine Ausgleichsfunktion im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate der Form

$$x \mapsto f(x) = a \cdot 2^x + b$$

mit zu bestimmenden Größen $a, b \in \mathbb{R}$ finden. Benutzen Sie hierfür die Gaußsche Normalengleichung und geben Sie die optimalen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Problem 3. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = n$, dann sind Lösungen der Normalengleichung eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Benutzen Sie hierfür die aus der linearen Algebra bekannte Identität: $\big(\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})\big)^\perp = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}^\top)$.

Abgabe: bis zum 29.05.2025.