EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Benedict Sondershaus

Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25 **Tübingen, 09.05.2025**

Übungsaufgaben 3

Problem 1. Auf $\mathbb{R}^n$ ist für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ die Eins-Norm definiert durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Zeigen Sie, daß die zugehörige Matrixnorm für eine $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die definiert ist durch

$$|||\boldsymbol{A}|||_1 := \sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\boldsymbol{A}\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}\,,$$

die folgende Relation erfüllt:

$$|||\boldsymbol{A}|||_1 := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(maximale Spaltenbetragssumme).}$$

Problem 2.

a) Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch und positiv definit. Leiten Sie einen Algorithmus her, mit dem Sie eine[1] linke untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten, sodaß $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top$ gilt.

b) Wenn möglich, geben Sie eine entsprechende Zerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

an oder begründen Sie, warum dies nicht möglich ist.

Bemerkung: Diese Zerlegung heißt **Choleski-Zerlegung** und gilt für allgemeine Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die symmetrisch positiv definit sind; einmal erhalten ist es dann leicht möglich, das zugehörige Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ durch Rückwärtseinsetzen zu lösen; s. auch **Problem 3** auf **Aufgabenblatt 1**.

Abgabe: bis zum 15.05.2025.

[1] Eine linke untere Dreiecksmatrix ist eine Matrix mit (potentiell) nichtverschwindenden Einträgen auf der Hauptdiagonale und (potentiell) nichtverschwindendem erstem Eintrag der 2. Zeile.