EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Benedict Sondershaus

Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25 **Tübingen, 24.04.2025**

Übungsaufgaben 2

Problem 1.

a) Berechnen Sie den relativen Fehler der Funktion $\varphi(x) = x^2$. Für welche Maschinengenauigkeiten ε liegt eine Fehlerverstärkung vor, die nicht mehr von Ordnung ε ist?

b) Berechnen Sie den relativen Fehler der Funktion $\psi(x) := \exp(x)$. Berechnen Sie den relativen Fehler hierzu exakt und führen Sie anschließend mit dem resultierenden Term eine geeignete Taylor-Entwicklung durch. Benutzen Sie alternativ die Formel aus der Vorlesung für die Kondition des Problems.

Problem 2. Die Konditionszahl einer invertierbaren Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als

$$\mathtt{cond}(\boldsymbol{A}) := |||\boldsymbol{A}||| \cdot |||\boldsymbol{A}^{-1}|||\,.$$

Hierbei bezeichnet $|||\cdot||| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_0^+$ eine beliebige *Matrizennorm*. Die Konditionszahl besitzt folgende Eigenschaften:

a) Es gilt $\mathtt{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 1$.

b) Sei $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathtt{cond}(\alpha\boldsymbol{A}) = \mathtt{cond}(\boldsymbol{A})$.

c) Sei $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Dann gilt $\mathtt{cond}(\boldsymbol{I}) = 1$.

Beweisen Sie diese Eigenschaften für die von der *Vektornorm* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+$ *induzierten Matrizennorm*

$$|||\boldsymbol{A}||| = \min_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\boldsymbol{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\,.$$

Problem 3. Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

a) $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar.

b) Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $a_{ii} > 0$.

c) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind reell.

d) Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind positiv.

Abgabe: bis zum 01.05.2025.