



Mathematik für Informatiker 4: Numerik

Sommersemester 25

Tübingen, 17.04.2025

Übungsaufgaben 1

Problem 1.

- Geben Sie möglichst viele hinreichende Kriterien an, wann eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist. Sind diese auch notwendig?
- Was sagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus? Für welche Funktionen ist er gültig?
- Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialgleichung? Was besagt der Mittelwertsatz der Integralrechnung?
- Wiederholen Sie den Satz von Taylor für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Welche Voraussetzungen muß dabei f erfüllen? Geben Sie mindestens zwei Restgliedformen an.

Problem 2. In der Vorlesung relevant sein wird in Kürze neben einer Vektornorm: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine weitere Abbildung: die (von einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|$) *induzierte Matrizennorm* $|||\cdot||| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, die definiert ist vermöge

$$|||A||| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie:

- Für die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt jeweils: $|||I||| = 1$.
- Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt, daß $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$.
- Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.
- Fixiere ein $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\| \leq |||A||| \cdot \|x\|$.
- Die Abbildung $|||\cdot||| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist eine *Norm* auf dem Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Problem 3. Sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindender Diagonale, d.h.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix},$$

mit $r_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Sei weiter $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- a) Entwickeln Sie einen Algorithmus, mit welchem Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösen können. Wieviele *elementare Rechenschritte* sind abhängig von der Dimension n benötigen Sie hierfür?
- b) Wie berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{R}$ mit möglichst wenig Rechenoperationen? Wieviele Rechenoperationen sind hierfür notwendig?
- c) Was ändert sich, wenn es sich um eine linke Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ handelt?

Hinweis: Ein *elementarer Rechenschritt* ist eine Addition, Subtraktion, Multiplikation, oder Division.

Abgabe: bitte vergleichen Sie hierzu die Homepage der Vorlesung.