



Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021

Tübingen, 07.07.2021

Übungsblatt 10

Problem 1. Aus der Vorlesung bekannt ist das *Stabilitätsgebiet* $SG \subset \mathbb{C}$ eines Einschrittverfahrens. Mit dem Verstärkungsfaktor $\omega(z)$ definieren wir zusätzlich das *Stabilitätsintervall*

$$SI = \{z \in \mathbb{R} : |\omega(z)| \leq 1\}.$$

a) Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittformeln an ($n \geq 1$):

a₁) $y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} \{f(y_n) + f(y_{n-1})\},$

a₂) $y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1} + \frac{h}{2}f(y_{n-1})).$

b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnungen beider Einschrittverfahren.

Problem 2. Aus einer skalaren Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),$$

mit einer differenzierbaren Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ gewinnt man durch Einführung der Hilfsfunktionen

$$x_1 := x \quad \text{und} \quad x_2 := x'$$

ein System von Gleichungen 1. Ordnung. Man zeige, daß die Jacobi-Matrix von dessen rechter Seite im Falle $\partial_x f \geq 0$ nur reelle Eigenwerte hat.

Problem 3. Rekapitulieren Sie die in der Vorlesung angegebene ‘Methode der Schrittweitenhalbierung’ zur Schätzung des Abschneidefehlers *expliziter* Einschrittverfahren, und beantworten Sie hierbei die folgenden Fragen:

a) Wie lauten die Formeln, wenn statt der ‘Schrittweitenhalbierung’ mit ‘Schrittweitemviertelung’ gearbeitet wird?

b) Ist diese Methode anwendbar auch für *implizite* Einschrittverfahren ($n \geq 1$)

$$y_n = y_{n-1} + h_n \mathbf{F}(h_n; y_{n-1}, y_n)$$

mit L -stetiger Verfahrensfunktion \mathbf{F} ? Hierbei reicht eine Diskussion für den *impliziten Euler*.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung in pdf-Format bis Mittwoch, den 14.07.2021, um 23.59 Uhr mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021 an: “ eberspaecher@na.uni-tuebingen.de “.