EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 30.06.2021**

Übungsblatt 9

Problem 1. Sei $\mathbf{f} \in C^1_{\mathtt{beschr}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Wähle ein $T > 0$, und betrachte die Lösung der AWA

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad (0 < t < T)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d\,.$$

Sei zusätzlich $\mathbf{f}$ (strikt) monoton und homogen. Es bezeichne $\{t_n\}_{0\leq n\leq T} \subset [0,T]$ eine äquidistante Partitionierung von $[0,T]$, und $\{\mathbf{y}_n;\, n\geq 0\} \subset \mathbb{R}^d$ die Iterierten des *impliziten* Eulerverfahrens. Versuchen Sie die Herleitung einer (in der Zeit) *gleichmäßigen* Fehlerabschätzung — *ohne* eine Schrittweitenbedingung.

Hinweis: In dieser Aufgabe nehmen wir an, daß das implizite Euler-Verfahren für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Lösung $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^d$ besitzt; vgl. Problem 2.

Problem 2. Betrachten Sie nochmals den impliziten Euler, der die spezielle AWA aus Problem 1 approximativ löst. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ bei beliebiger äquidistanter Schrittweite h stets die Approximation $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^d$ existiert, die als Grenzwert der Folge $\{\mathbf{y}^{(\ell)}\}_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ erhalten werden kann, deren Iterierte folgende Probleme lösen:

$$\mathbf{y}^{(\ell)} = \mathbf{y}^{(\ell-1)} - \theta\Big(\mathbf{y}^{(\ell-1)} - h\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(\ell-1)}) - \mathbf{y}_{n-1}\Big) \qquad (\ell \in \mathbb{N}_0)\,,$$

mit $\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y}_{n-1}$; hierbei ist $\theta = (1+h^2L^2)^{-1}$, und in diesem Fall gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|\mathbf{y}^{(\ell)} - \mathbf{y}_n\| \leq \Big(1 - \frac{1}{1+h^2L^2}\Big)^{\frac{\ell}{2}} \|\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(0)}\| \qquad (\ell \geq 1)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz.

Problem 3. a) Das SIR-Modell von **Kermack-McKendrick** (1927) zur Beschreibung einer Epidemie kennen wir bereits aus der Vorlesung ($\alpha,\beta > 0$): für alle $t > 0$ gelte

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta IS\,, \\ I'(t) &= \beta IS - \alpha I\,, \\ R'(t) &= \alpha I \end{aligned} \tag{1}$$

mit Anfangsdatum $\big(S(0), I(0), R(0)\big) = \big(S_0, I_0, R_0\big) \in [\mathbb{R}^+_0]^3$.

a$_1$) Zeigen Sie, daß genau eine Lösung (S, I, R) für alle Zeiten $t \geq 0$ existiert.

a$_2$) Zeigen Sie, daß entlang dieser Lösung

$$V(I,S) = I + S - \frac{\alpha}{\beta}\ln S \qquad \text{invariant ist, d.h.:} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V\big(I(t),S(t)\big) = 0 \quad \forall\, t > 0\,.$$

b) Eine Modifikation ist das SIS-Modell, das eine *unmittelbare, wiederholte* Infizierbarkeit genesener Individuen einer Population gestattet (was z.B. bei der Influenza realistisch ist). Es hat die Form ($t > 0$)

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta IS + \alpha I\,, \\ I'(t) &= \beta IS - \alpha I\,, \end{aligned} \tag{2}$$

mit Anfangsdaten $\big(S(0), R(0)\big) = \big(S_0, I_0\big)$.

b$_1$) Zeigen Sie, daß genau eine Lösung (S, I) für alle Zeiten $t \geq 0$ existiert.

b$_2$) Schreiben Sie nun (2) um in die **logistische Gleichung**

$$I'(t) = rI(t)\Big(1 - \frac{I(t)}{K}\Big)\,,$$

mit Konstanten $r, K \in \mathbb{R}$, und zeigen Sie, daß die Infiziertenzahlen $I(t)$ für $t \uparrow \infty$ verschwinden, wenn $r < 0$.

b$_3$) Wie lautet der explizite Euler für Problem (2)? Welches sind zulässige Schrittweiten, die eine gleichmäßige Konvergenz sicherstellen?

Hinweis zu a): Verwenden Sie den Satz von Peano zur Konstruktion einer lokalen Lösung. Argumentieren Sie, daß alle drei Lösungskomponenten nicht-negativ sind. Argumentieren Sie schließlich damit, daß $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S + I + R) = 0$ gilt (warum?).

Bemerkung zu b): Der hier betrachtete Parameter r läßt sich unmittelbar als die (aus aktuellen Medien-Diskussionen bekannte) Reproduktionszahl umschreiben.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 07.07.2021, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".