EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 23.06.2021**

Übungsblatt 8

Problem 1. Betrachten Sie die Menge $(0,T)\times\mathcal{O}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, mit speziell $\mathcal{O}=(0,1)$. Nachfolgend betrachten wir eine sog. *partielle Differentialgleichung (PDE)* — die Wärmeleitungsgleichung — die die '(Raum-)Temperatur' $u\equiv u(t,\mathbf{x})$ für alle $(0,T)\times\mathcal{O}$ bestimmt durch folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t}-\Delta u(t,\mathbf{x})=g(t,\mathbf{x})\qquad\forall\,(t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\mathcal{O}\,,\qquad\text{(d.h., PDE)}\,,\tag{1}$$

$$u(0,\mathbf{x})=u_0(\mathbf{x})\qquad\forall\,\mathbf{x}\in\overline{\mathcal{O}}\,,\qquad\text{(d.h., Anfangsbedingungen)}\,,\tag{2}$$

$$u(t,\mathbf{x})=0\qquad\forall\,(t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\partial\mathcal{O}\,,\qquad\text{(d.h., Randbedingungen)}\,,\tag{3}$$

bei vorgegebenen Funktionen

$$u_0\in C(\overline{\mathcal{O}})\,,\qquad\text{und}\qquad g\in C([0,T]\times\overline{\mathcal{O}})\,.$$

Gegenstand der Vorlesung: *Partielle Differentialgleichungen* ist eine Lösungstheorie; wir wollen im Rahmen dieser Aufgabe mithilfe der *Linienmethode* eine 'zugehörige' AWA vom Typ

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\quad(t>0)\qquad\mathbf{x}(0)\in\mathbb{R}^d\tag{4}$$

formulieren, mit deren Hilfe eine numerische **Annäherung der Lösung** von (1)—(3) gelingt. Zu diesem Zweck gehen wir wie folgt vor:

1) **(Partitionierung von $\mathcal{O}$)** Wähle eine (uniforme) Partitionierung $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^d$ von $\mathcal{O}$ der Feinheit $\Delta\mathbf{x}>0$, mit den Eigenschaften:

$$\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i=\Delta\mathbf{x}\quad\forall\,0\le i\le d-1\,,\qquad\bigcup_{i=0}^{d-1}[\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1}]=\overline{\mathcal{O}}\,,\qquad\mathbf{x}_0=0\,,\quad\mathbf{x}_d=1\,.\tag{5}$$

2) **(Approximation von $-\Delta$ durch einen Differenzenquotienten)** Für alle $1\le i\le d-1$ approximieren wir

$$\Delta u(t,\mathbf{x}_i)\approx\frac{u(t,\mathbf{x}_{i-1})-2u(t,\mathbf{x}_i)+u(t,\mathbf{x}_{i+1})}{(\Delta\mathbf{x})^2}\qquad\forall\,t\in(0,T)\,.\tag{6}$$

a) Wie lautet das zugehörige ODE-System (samt Anfangsbedingung) für

$$\mathbf{x}(t)\approx\big(u(t,\mathbf{x}_1),\dots,u(t,\mathbf{x}_{d-1})\big)\qquad\forall\,t\in(0,T)\,,$$

wobei (6) verwendet wird, und $\mathbf{b}(t):=\big(g(t,\mathbf{x}_1),\dots,g(t,\mathbf{x}_{d-1})\big)^\top$? Handelt es sich um ein Gradientensystem, wenn wir $g \equiv 0$ setzen?

b) Wie lautet der *implizite Euler* für die ODE aus a)? Ist das resultierende algebraische Problem pro Zeitschritt mit dem *LR*-Verfahren aus der Numerik lösbar?

Problem 2. Als konkrete Daten in **Problem 1** wählen wir $T = 5$, $g \equiv 0$, und betrachten drei verschiedene Startfunktionen

$$u_0^{(i)}(\mathbf{x}) = i^2 \sin(\pi \mathbf{x}) \qquad (1 \leq i \leq 3)\,.$$

a) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm, das den *impliziten Euler* aus **Problem 1**, **b)** umsetzt. Simulieren Sie hiermit nun auf einem Ortsgitter der Feinheit $\Delta x = \frac{1}{50}$ und für Zeitschrittweiten $h \in \{\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}\}$. Plotten Sie Ihr Ergebnis jeweils $(1 \leq i \leq 3)$ für die Zeiten $t \in \{0.2, 0.5, 2\}$. Diskutieren Sie die Dynamik.

b) Wie lautet der *explizite Euler* für die ODE aus **Problem 1**, **a)**? Modifizieren Sie nun Ihr `MATLAB`-Programm aus **a)** entsprechend, und vergleichen Sie entsprechende Simulationsergebnisse mit dem *expliziten Euler* mit denen aus **a)**.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 30.06.2021, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".