EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 09.06.2021**

Übungsblatt 6

Problem 1. Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \,.$$

Zeigen Sie, daß dann kein Eigenwert von $D\mathbf{f}(\mathbf{z})$ einen positiven Realteil besitzt.

Problem 2. Beweisen Sie folgende Aussagen aus der Vorlesung:

1) Sei V eine Liapunov-Funktion des ODE-Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit Gleichgewichtspunkt $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$. Dann ist $\mathbf{z}$ stabil.

2) Falls zusätzlich $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathscr{D} \setminus \{\mathbf{z}\}$, dann ist $\mathbf{z}$ asymptotisch stabil.

Problem 3. Betrachte das ODE-System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2x_2 + x_2x_3 \\ x_1 - x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$. Ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ stabil?

<u>**Hinweis:**</u> Finden Sie eine Liapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+$ unter der Funktionenschar

$$V(\mathbf{x}) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 \qquad (c_i \in \mathbb{R}_0^+) \,.$$

Problem 4. Betrachte das Hamilton'sche System

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \,, \qquad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \,,$$

mit Hamiltonfunktion $H : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß sich H entlang seiner (Lösungs-)Trajektorien nicht ändert.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* <u>bis Mittwoch, den 16.06.2021, um 23.59 Uhr</u> *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".