EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 05.05.2021**

Übungsblatt 3

Problem 1. Gegeben sei die lineare AWA

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (t > 0)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d\,,$$

mit einer stetigen Matrixfunktion $\boldsymbol{A} : t \mapsto \boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, sowie einer Vektorfunktion $\mathbf{b} : t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^d$.

(a) Sei zusätzlich $-\boldsymbol{A} : t \mapsto -\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathtt{spd}}$, <u>also:</u> gleichmäßig für alle $t > 0$ sei $-\boldsymbol{A}(t)$ symmetrisch und positiv definit.

(b) Sei $\mathbf{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbf{b}(t)$ gleichmäßig beschränkt.

Diskutieren Sie (eindeutige, globale) Lösbarkeit dieser AWA.

<u>Hinweis:</u> Argumentieren Sie mithilfe des 'Monotoniebegriffs' von $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Problem 2. Betrachte in **Problem 3** die AWA (1), mit den dort gemachten Datenannahmen. Die 'Methode der sukzessiven Approximation' (oder: 'Picard-Iteration') generiert eine (Cauchy-)Folge $\{\mathbf{x}^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C([0,T];\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathbf{x}^k \equiv \{\mathbf{x}^k(t);\, 0 \le t \le T\}$ löst

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{k-1}(s)\big)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [0,T]\,,$$

mit $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ für alle $t \in [0,T]$; hierbei ist $T > 0$ eine Zahl, die von der Lipschitzkonstanten von $\mathbf{f}$ abhängt.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Lösen Sie AWA (1) — mit $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ — mithilfe der 'Methode der sukzessiven Approximation'.

(b) Diskutieren Sie den Einsatz dieser Methode für ein *allgemeines* $\mathbf{f}$: ist dieses Verfahren praktisch/numerisch 'geeignet'?

Problem 3. Fixiere $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Sei $\beta > 0$, und betrachte die abgeschlossene Menge

$$\boldsymbol{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d :\, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le \beta\}\,.$$

Fixiere nun eine Lipschitz-stetige Abbildung $\mathbf{f} : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}^d$, und betrachte die zugehörige AWA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (t > 0)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{1}$$

Unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Notation bezeichnen wir mit $\mathbf{x} \equiv \big\{\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0);\, t \in I(\mathbf{x}_0)\big\}$ seine Lösung. Zeigen Sie, daß $\mathbf{\Phi} \equiv \{\mathbf{\Phi}_t; t > 0\}$, via

$$\mathbf{\Phi}_t : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}\,, \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \qquad \forall\, t \in I(\mathbf{x}_0)$$

Fluß der AWA (1) ist.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 12.05.2020, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".