

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021

Tübingen, 05.05.2021

Übungsblatt 3

Problem 1. Gegeben sei die lineare AWA

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad (t > 0), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer stetigen Matrixfunktion $\mathbf{A}: t \mapsto \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, sowie einer Vektorfunktion $\mathbf{b}: t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^d$.

- (a) Sei zusätzlich $-\pmb{A}: t\mapsto -\pmb{A}(t)\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{spd}}$, also: gleichmäßig für alle t>0 sei $-\pmb{A}(t)$ symmetrisch und positiv definit.
- (b) Sei $\mathbf{b}: \mathbb{R}^+ \to \mathbf{b}(t)$ gleichmäßig beschränkt.

Diskutieren Sie (eindeutige, globale) Lösbarkeit dieser AWA.

Hinweis: Argumentieren Sie mithilfe des 'Monotoniebegriffs' von $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Problem 2. Betrachte in **Problem 3** die AWA (1), mit den dort gemachten Datenannahmen. Die 'Methode der sukzessiven Approximation' (oder: 'Picard-Iteration') generiert eine (Cauchy-)Folge $\{\mathbf{x}^k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C([0,T];\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathbf{x}^k\equiv\{\mathbf{x}^k(t);\ 0\leq t\leq T\}$ löst

$$\mathbf{x}^{k}(t) = \mathbf{x}_{0} + \int_{0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k-1}(s)) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

mit $\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}_0$ für alle $t \in [0,T]$; hierbei ist T > 0 eine Zahl, die von der Lipschitzkonstanten von \mathbf{f} abhängt.

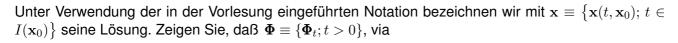
- (a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Lösen Sie AWA (1) mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via f(x) = ax mithilfe der 'Methode der sukzessiven Approximation'.
- (b) Diskutieren Sie den Einsatz dieser Methode für ein *allgemeines* f: ist dieses Verfahren praktisch/numerisch 'geeignet'?

Problem 3. Fixiere $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. Sei $\beta > 0$, und betrachte die abgeschlossene Menge

$$\mathbf{D} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le \beta \}.$$

Fixiere nun eine Lipschitz-stetige Abbildung $\mathbf{f}: \mathbf{D} \to \mathbb{R}^d$, und betrachte die zugehörige AWA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (t > 0), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$
 (1)



$$oldsymbol{\Phi}_t: oldsymbol{D} o oldsymbol{D} \,, \qquad ext{mit} \qquad oldsymbol{\Phi}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) \qquad orall \, t \in I(\mathbf{x}_0)$$

Fluß der AWA (1) ist.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 12.05.2020, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: "eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".