EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 15.07.2021**

Übungsblatt 11

Problem 1. Sei $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ist beschränkt.

(ii) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ist stetig.

(iii) $\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{X}$: $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ist stetig in $\mathbf{x}$.

(iv) $|||\boldsymbol{\mathcal{A}}||| := \sup\big\{||\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{x}|| : \ ||\mathbf{x}|| \leq 1\big\} < \infty$.

Problem 2. a) Sei $d \in \{1,2,3\}$, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \mathbb{L}^2(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : \|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} < \infty\}\,, \\ \text{mit} \quad \|u\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} &= \big(u,u\big)_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}\,, \qquad \text{wobei} \quad \big(u,v\big)_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $\big(\mathbb{L}^2(\mathcal{O}), (\cdot,\cdot)_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}\big)$ Hilbertraum.
b) Sei $\mathbb{X} = \mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})$, mit

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^1_0(\mathcal{O}) &= \big\{u \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}) : \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2} < \infty \quad \& \quad u\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0\big\}\,, \\ \text{mit} \quad (u,v)_{\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})} &= \big(u,v\big)_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} + \big(\nabla u, \nabla v\big)_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^d)}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $\big(\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O}), (\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})}\big)$ Hilbertraum.

Bemerkung: Ein genaueres Verständnis der hier betrachteten Funktionenräume benötigt das Konzept von Lebesgue-Integral, 'schwacher Ableitung', und Spursatz; s. z.B. das Buch: *'L.C. Evans: Partial differential equations' (2010)*. Darauf wollen wir hier nicht eingehen.

Problem 3. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, und $u_0\big|_{\partial\mathcal{O}} = u_1\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Die Ausbreitung einer Schallwelle wird durch die folgende Gleichung beschrieben,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0\,, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{O}\,, \quad \forall\, t > 0\,, \\ u(0,\cdot) = u_0\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) &= u_1\,, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{O}\,, \\ u(t,\cdot) &= 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O} \qquad \forall\, t > 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $u \equiv u(t, \mathbf{x})$ die Luftdruckdifferenz gegenüber Normaldruck.

(i) Sei $d = 2$. Schreiben Sie (1) als ODE auf dem Banachraum $\mathbb{X} = \mathbb{H}_0^1(\mathcal{O}) \times \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. Diskutieren Sie, was die Lösbarkeit von (1) sichert.

(ii) Sei $d = 1$. In Problem 1 auf Übungsblatt 8 haben wir für die Wärmeleitungsgleichung eine Approximationsmethode behandelt. Wie sieht hier die entsprechende Approximation aus?

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 21.07.2021, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".