EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 21.04.2021**

Übungsblatt 1

Problem 1. Schreiben Sie nachfolgende lineare ODEs — formuliert auf dem Intervall $[0,1]$ — in der Form eines linearen ODE-Systems und lösen Sie dieses:

(i) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$,

(ii) $\ddot{x} + x = 0$,

(iii) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie hierzu $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}_1$, etc.

Problem 2. Sei $\boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ eine lineare Abbildung. Sei

$$|||\boldsymbol{T}||| = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|\boldsymbol{T}(\mathbf{x})\|$$

die verwendete Operatornorm, mit euklidischer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie für $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$:

(i) $\|\boldsymbol{T}(\mathbf{x})\| \leq |||\boldsymbol{T}|||\,\|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

(ii) $|||\boldsymbol{TS}||| \leq |||\boldsymbol{T}|||\;|||\boldsymbol{S}|||$.

Problem 3: Sei $\boldsymbol{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ eine Matrix mit reellen, paarweise verschiedenen Eigenwerten. Sei $t \mapsto \mathbf{x}(t) \equiv \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ die Lösung des Anfangsproblems:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} \quad (t > 0)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\,.$$

Zeigen Sie für jedes feste $t \in \mathbb{R}^+$, daß

$$\lim_{\mathbf{y}_0 \to \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{y}_0) = \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)\,,$$

also: die Lösung $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ ist eine stetige Funktion der Anfangsbedingung.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 28.04.2021, um 23:59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ". Blatt 1 wird am Dienstag, den 04.05.2021 von 8:15-9:45 Uhr in der Übungsgruppe besprochen.