EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2020 **Tübingen, 02.07.2020**

Übungsblatt 9

Problem 1. Aus der Vorlesung bekannt ist das *Stabilitätsgebiet* $\mathtt{SG} \subset \mathbb{C}$ eines Einschrittverfahrens. Mit dem Verstärkungsfaktor $\omega(z)$ definieren wir zusätzlich das *Stabilitätsintervall*

$$\mathtt{SI} = \{z \in \mathbb{R} : |\omega(z)| \leq 1\}.$$

a) Geben Sie die Stabilitätsintervalle der folgenden Einschrittformeln an ($n \geq 1$):

a$_1$) $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + \frac{h}{2}\{\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1})\}$,

a$_2$) $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + h\mathbf{f}\big(\mathbf{y}_{n-1} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1})\big)$.

b) Bestimmen Sie die Konsistenzordungen beider Einschrittverfahren.

Problem 2. Aus einer skalaren Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big),$$

mit einer differenzierbaren Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ gewinnt man durch Einführung der Hilfsfunktionen

$$x_1 := x \qquad \text{und} \qquad x_2 := x'$$

ein System von Gleichungen 1. Ordnung. Man zeige, daß die Jacobi-Matrix von dessen rechter Seite im Falle $\partial_x f \geq 0$ nur reelle Eigenwerte hat.

Problem 3. Rekapitulieren Sie die in der Vorlesung angegebene 'Methode der Schrittweitenhalbierung' zur Schätzung zur Schätzung des Abschneidefehlers *expliziter* Einschrittverfahren, und beantworten Sie hierbei die folgenden Fragen:

a) Wie lauten die Formeln, wenn statt der 'Schrittweitenhalbierung' mit 'Schrittweitenviertelung' gearbeitet wird?

b) Ist diese Methode anwendbar auch für *implizite* Einschrittverfahren ($n \geq 1$)

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + h_n\mathbf{F}\big(h_n; \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n\big)$$

mit L-stetiger Verfahrensfunktion $\mathbf{F}$? Hierbei reicht eine Diskussion für den *impliziten Euler*.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Donnerstag, den 09.07.2020, um 10.00 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2020* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".