EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2020 **Tübingen, 18.06.2020**

Übungsblatt 7

Problem 1. Betrachten Sie die Menge $(0,T) \times \mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mit speziell $\mathcal{O} = (0,1)$. Nachfolgend betrachten wir eine sog. *partielle Differentialgleichung (PDE)* — die Wärmeleitungsgleichung — die die '(Raum-)Temperatur' $u \equiv u(t,\mathbf{x})$ für alle $(0,T) \times \mathcal{O}$ bestimmt durch folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta u(t,\mathbf{x}) = g(t,\mathbf{x}) \qquad \forall\,(t,\mathbf{x}) \in (0,T) \times \mathcal{O}\,, \qquad \text{(d.h., PDE)}\,, \tag{1}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \overline{\mathcal{O}}\,, \qquad \text{(d.h., Anfangsbedingungen)}\,, \tag{2}$$

$$u(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall\,(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \partial\mathcal{O}\,, \qquad \text{(d.h., Randbedingungen)}\,, \tag{3}$$

bei vorgegebenen Funktionen

$$u_0 \in C(\overline{\mathcal{O}})\,, \qquad \text{und} \qquad g \in C([0,T] \times \overline{\mathcal{O}})\,.$$

Gegenstand der Vorlesung: *Partielle Differentialgleichungen* ist eine Lösungstheorie; wir wollen im Rahmen dieser Aufgabe mithilfe der *Linienmethode* eine 'zugehörige' AWA vom Typ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (t > 0) \qquad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^d \tag{4}$$

formulieren, mit deren Hilfe eine numerische **Annäherung der Lösung** von (1)—(3) gelingt. Zu diesem Zweck gehen wir wie folgt vor:

1) **(Partitionierung von $\mathcal{O}$)** Wähle eine (uniforme) Partitionierung $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^d$ von $\mathcal{O}$ der Feinheit $\Delta\mathbf{x} > 0$, mit den Eigenschaften:

$$\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = \Delta\mathbf{x} \quad \forall\, 0 \le i \le d-1\,, \qquad \bigcup_{i=0}^{d-1} [\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}] = \overline{\mathcal{O}}\,, \qquad \mathbf{x}_0 = 0\,, \quad \mathbf{x}_d = 1\,. \tag{5}$$

2) **(Approximation von $-\Delta$ durch einen Differenzenquotienten)** Für alle $1 \le i \le d-1$ approximieren wir

$$\Delta u(t,\mathbf{x}_i) \approx \frac{u(t,\mathbf{x}_{i-1}) - 2u(t,\mathbf{x}_i) + u(t,\mathbf{x}_{i+1})}{(\Delta\mathbf{x})^2} \qquad \forall\, t \in (0,T)\,. \tag{6}$$

a) Wie lautet das zugehörige ODE-System (samt Anfangsbedingung) für

$$\mathbf{x}(t) \approx \big(u(t,\mathbf{x}_1), \ldots, u(t,\mathbf{x}_{d-1})\big) \qquad \forall\, t \in (0,T)\,,$$

wobei (6) verwendet wird, und $\mathbf{b}(t) := \big(g(t,\mathbf{x}_1), \ldots, g(t,\mathbf{x}_{d-1})\big)^\top$? Handelt es sich um ein Gradientensystem, wenn wir $g \equiv 0$ setzen?

b) Wie lautet der *implizite Euler* für die ODE aus a)? Ist das resultierende algebraische Problem pro Zeitschritt mit dem *LR*-Verfahren aus der Numerik lösbar?

Problem 2. Als konkrete Daten in **Problem 1** wählen wir $T = 5,\ g \equiv 0$, und betrachten drei verschiedene Startfunktionen

$$u_0^{(i)}(\mathbf{x}) = i^2 \sin(\pi \mathbf{x}) \qquad (1 \le i \le 3)\,.$$

a) Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm, das den *impliziten Euler* aus **Problem 1**, **b)** umsetzt. Simulieren Sie hiermit nun auf einem Ortsgitter der Feinheit $\Delta x = \frac{1}{50}$ und für Zeitschrittweiten $h \in \{\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}\}$. Plotten Sie Ihr Ergebnis jeweils ($1 \le i \le 3$) für die Zeiten $t \in \{0.2, 0.5, 2\}$. Diskutieren Sie die Dynamik.

b) Wie lautet der *explizite Euler* für die ODE aus **Problem 1**, **a)**? Modifizieren Sie nun Ihr `MATLAB`-Programm aus **a)** entsprechend, und vergleichen Sie entsprechende Simulationsergebnisse mit dem *expliziten Euler* mit denen aus **a)**.

Problem 3. Das *endemische SIR-Modell* ist eine leichte Modifikation des SIR-Modells aus der Vorlesung: Für $\alpha, \beta, \gamma > 0$ lautet es

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \alpha - \beta IS - \alpha S\,, \\ \dot{I} &= \beta IS - \gamma I - \alpha I\,, \end{aligned}$$

mit Anfangsdaten

$$S(0) = S_0 \ge 0\,, \qquad \text{und} \qquad I(0) = I_0 \ge 0\,.$$

a) Diskutieren Sie die (eindeutige, globale) Lösbarkeit dieser AWA.

b) Untersuchen Sie seine (hyperbolischen?) Gleichgewichtspunkte auf Stabilität — in Abhängigkeit von seiner Reproduktionszahl $R = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$. Interpretieren Sie Ihre Aussagen (anhand von Figur 1) epidemiologisch.

c) Wie lautet eine Diskretisierung mit dem *impliziten Eulerverfahren*? Ist dieses in jedem Zeitschritt lösbar?

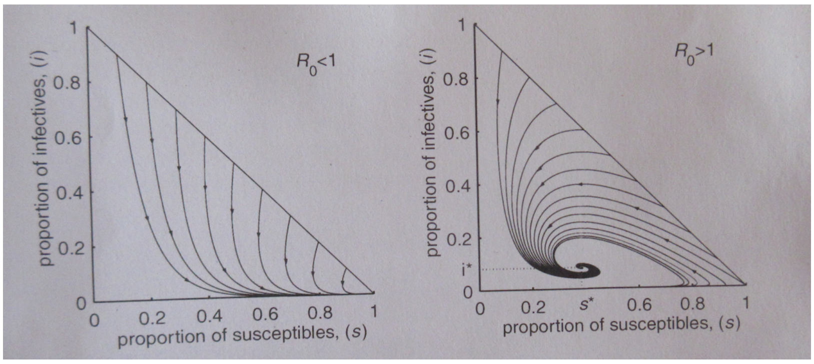

Abbildung 1: Phasenporträt des endemischen SIR-Modells; **aus:** M. Choisy, J.-F. Guegan, P. Rohani, *Mathematical modeling of infectious diseases dynamics*, pp. 379–404, Encyclopedia of Infectious Diseases; 2007 Wiley & Sons.

Hinweis zu c): Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz: wie lautet hierbei eine implementierbare Fixpunkt-Iteration in jedem Zeitschritt?

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Donnerstag, den 25.06.2020, um 10.00 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2020* an: “ eberspaecher@na.uni-tuebingen.de “.