EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2020 **Tübingen, 11.06.2020**

Übungsblatt 6

Problem 1. Beweisen Sie folgende Ausagen aus der Vorlesung über Gradientensysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})\,.$$

a) An regulären Punkten von V kreuzen seine Trajektorien Niveau-Hyperflächen $\{\mathbf{x} \in \mathscr{D} : V(\mathbf{x}) = c\}$ orthogonal.

b) Strikte lokale Minima von V sind asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte des Gradientensystems.

Problem 2. a) Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^d$, und $\mathbf{f} \in C(\mathscr{D}; \mathbb{R}^d)$. In der einführenden *Numerik*-Vorlesung haben wir mithilfe des *expliziten Euler-Verfahrens* und einer hiermit konstruierten, gewissen konvergenten Teilfolge stetiger Funktionen eine lokale Lösung gefunden der AWA:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (0 < t < T)\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathscr{D} \tag{1}$$

— und somit *konstruktiv* den *Satz von Peano* bewiesen. Wiederholen Sie den Beweis.

b) Sei zusätzlich $\mathbf{f}$ Lipschitz. Zeigen Sie, daß die *gesamte* — in **a)** konstruierte — Folge approximierender, stetiger Funktionen nun gegen *die* Lösung von (1) konvergiert.

c) Sei zusätzlich $\mathbf{f} \in C^1(\mathscr{D}; \mathbb{R}^d)$. Es bezeichne $\{\mathbf{y}^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}^d$ die endliche Folge von (expliziten) Euler-Iterierten, bei uniformer Schrittweite $h = \frac{T}{N}$. Zeigen Sie, daß folgende Abschätzung gilt:

$$\exists C > 0 : \qquad \max_{n \geq 0} \|\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{y}^n\| \leq Ch\,.$$

Wovon hängt die hierbei verwendete — von h unabhängige! — Konstante $C > 0$ ab?

<u>**Hinweise:**</u> **1.** Abhängig von der 'Kompliziertheit' von $\mathbf{f}$ gelten also für das (für Simulationen implementierbare! — also numerische) explizite Eulerverfahren: 'Teilfolgenkonvergenz' (**a)**), 'Konvergenz' (**b)**), bzw. 'Ratenkonvergenz' (**c)**).
2. Für die Bearbeitung hilfreich ist das Skript von R. Rannacher: *Numerik I — Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen* (U Heidelberg; online verfügbar).

Problem 3. Sei $T > 0$. Für viele Probleme (1) erweist sich das *implizite Euler-Verfahren* mit Iterierten $\{\mathbf{y}^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}^d$ als sinnvoll — anstelle des *expliziten Euler-Verfahrens* —, die erfüllen

$$\mathbf{y}^n = \mathbf{y}^{n-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{y}^n) \qquad (1 \leq n \leq \frac{T}{h}), \qquad \text{und} \quad \mathbf{y}^0 = \mathbf{x}_0 \,. \tag{2}$$

als sinnvoll. Hier muß nun allerdings die (eindeutige) Lösbarkeit von (2) für jedes $n \geq 1$ zunächst analytisch geklärt, und dann numerisch angegangen werden.

a) Diskutieren Sie die Lösbarkeit von (2) pro Zeitschritt für $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$, mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, bzw. $-\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathtt{spd}}$.

b) Anstelle der autonomen ODE (1) betrachten wir die ODE:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} \quad (t > 0)\,, \qquad \text{mit } t \mapsto -\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathtt{spd}}\,.$$

Wie lautet hier nun das *implizite Euler-Verfahren*? Zeigen Sie für dieses Verfahren *Ratenkonvergenz*, und präzisieren Sie hierbei nötige Forderungen an beteiligte 'Daten' T, $\mathbf{x}_0$, und $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Donnerstag, den 18.06.2020, um 10.00 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2020* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".