EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2020 **Tübingen, 09.07.2020**

Übungsblatt 10

Problem 1. In der Vorlesung haben wir die äquivalente *variationelle* Formulierung:

$$\text{Finde } \mathbf{x} \in C^1\big((0,T);\mathbb{R}^d\big),\ \text{mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 : \qquad \int_0^T \big(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}s = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C\big([0,T];\mathbb{R}^d\big) \tag{1}$$

kennengelernt der *klassischen* Formulierung der AWA:

$$\text{Finde } \mathbf{x} \in C^1\big((0,T);\mathbb{R}^d\big),\ \text{mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 : \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \forall\, 0 < t < T\,. \tag{2}$$

Sei $\{t_n\}_{n=0}^N \subset [0,T]$ ein Gitter, das $[0,T]$ überdeckt, mit $t_0 = 0$ und $t_N = T$. Mit der in der Vorlesung eingeführten Notation lautet eine weitere *variationelle* Formulierung:

$$\text{Finde } \mathbf{x} \in V,\ \text{mit } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^- = \mathbf{x}_0,\ \text{sodaß}$$
$$\sum_{n=1}^N \Big\{ \int_{I_n} \big(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}\big)\,\mathrm{d}s + \big([\mathbf{x}]_{n-1}, \boldsymbol{\varphi}_{n-1}^+\big) \Big\} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in V\,. \tag{3}$$

Zeigen Sie, daß Formulierung (3) äquivalent ist zu (1).

Problem 2. Betrachte (2), mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{B}\mathbf{x}$, wobei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$. In der Vorlesung wurde das dG(r)-Verfahren notiert als: Finde $\mathbf{y} \in S_h^{(r)}$, sodaß

$$A(\mathbf{y}, \boldsymbol{\Phi}) = (\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\Phi}_0^-) \qquad \forall \boldsymbol{\Phi} \in S_h^{(r)}\,.$$

Zeigen Sie die Lösbarkeit dieser Aufgabe.

Problem 3. Zeigen Sie: Für Funktionen $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{P}_r(I_n;\mathbb{R}^d)$ gilt die *diskrete Sobolev'sche Ungleichung*

$$\sup_{s\in I_n} \|\boldsymbol{\varphi}(s)\| \le C\Big(\int_{I_n} (s - t_{n-1})\|\boldsymbol{\varphi}'(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \|\boldsymbol{\varphi}_n^-\|^2\Big)^{1/2},$$

mit einer Konstante $C > 0$, die von der Intervall-Länge $h_n > 0$ unabhängig ist.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Donnerstag, den 16.07.2020, um 10.00 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2020* an: “ eberspaecher@na.uni-tuebingen.de “.