Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.07.2021

13. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 73: Bestimmen Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 74: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $w(x,t) = f(x + at) + g(x - at)$. Zeigen Sie, dass w die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$$

erfüllt.

Aufgabe 75: Sei

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 > 0 \; , \; 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 3\}$$

und $f(x) = e^{x_1^2} e^{x_2^2}$. Berechnen Sie

$$\int_A f(x) dx \, .$$

Aufgabe 76: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \, . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$ ist. Ist f stetig in $(0,0)$?

Aufgabe 77: Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ die Oberfläche einer Kugel vom Radius r und sei $f(x,y,z) = z^2$. Berechnen Sie

$$\int_S f d\sigma \, .$$

Aufgabe 78: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 - y^4)$. Zeigen Sie, dass $\nabla f(0,0) = 0$. Für welche Werte von α und β liegt ein lokales Maximum oder Minimum vor?

Bearbeitung freiwillig.