

10. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 55: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $U := \{x \in [a, b] : f \text{ ist nicht stetig in } x\}$ die Menge Ihrer Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie: Wenn U höchstens endlich viele Häufungspunkte hat, dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

Aufgabe 56: Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int_A \exp(-x^2) d(x, y) \quad A = \text{Dreieck mit Eckpunkten } (0, 0), (3, 0), (3, 1),$$

$$\int_A \cos(x + y + z) d(x, y, z) \quad \text{wobei } A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Hinweis: $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos \alpha$.

Aufgabe 57: Berechnen Sie das Integral

$$\int_A z \, dx dy dz$$

über die obere Hälfte A des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Aufgabe 58: Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x)| \leq M < \infty \forall x \in Q$, für welche die Menge der Unstetigkeitspunkte eine Nullmenge ist. Zeigen Sie, dass die im Beweis des Satzes 1 von Paragraph 5.2 definierte Regularisierung f_ρ von f stetig auf Q und durch M beschränkt ist.

Aufgabe 59: Sei

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c\}.$$

Zeigen Sie mittel Induktion nach n , dass $\mu(A) = \frac{c^n}{n!}$.

Aufgabe 60: Sei $f(y) = \min\{1, \ln(1/y)\}$.

Drücken Sie $\int_0^1 \left[\int_0^{f(y)} xy \, dx \right] dy$ als Integral über eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 aus und berechnen Sie dieses Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge.