Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 22.06.2021

9. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 49: Bestimmen Sie das Maximum von $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ unter $3x + 2y = 18$.

Lösung. Wir berechnen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

und $\nabla g(x,y)^T = (3,2)^T$. Die notwendige Bedingung $\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0$ liefert

$$\frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = -3\lambda$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = -2\lambda\,.$$

Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite, erhält man

$$2\frac{y}{x} = \frac{3}{2}\,,$$

also $y = \frac{3}{4}x$. Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, folgt zunächst $x = 4$ und damit $y = 3$. Dass es sich um ein Maximum und kein Minimum handelt, sieht man, indem man andere Paare (x,y) einsetzt, die die Nebenbedingung erfüllen. □

Aufgabe 50: Berechnen Sie den Maximalwert von

$$x^a y^b z^c \quad (x,y,z > 0\,; \quad a,b,c > 0 \text{ gegeben})$$

unter der Bedingung $x^k + y^k + z^k = 1 \quad (k > 0)$.
Schließen Sie daraus auf die Ungleichung

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}\,.$$

Beweis. Setze $g(x,y,z) := x^k + y^k + z^k - 1$. Dann ist $\nabla g(x,y,z) = \left(kx^{k-1}, ky^{k-1}, kz^{k-1}\right)^T \neq (0,0,0)^T$ für $x,y,z > 0$. Also ist nach IV § 2 Satz 1 eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum in (x_0,y_0,z_0), dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $DL(x_0,y_0,z_0,\lambda) = (0,0,0,0)^T$, wobei $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ ist. Wir suchen deshalb eine Lösung des Gleichungssystems:

$$ax^{a-1}y^b z^c - \lambda k x^{k-1} = 0 \tag{1}$$
$$bx^a y^{b-1} z^c - \lambda k y^{k-1} = 0 \tag{2}$$
$$cx^a y^b z^{c-1} - \lambda k z^{k-1} = 0 \tag{3}$$
$$x^k + y^k + z^k - 1 = 0. \tag{4}$$

Multipliziere dazu (1) mit x, (2) mit y, (3) mit z und addiere dann diese drei Gleichungen. Das ergibt nach Ausklammern

$$\underbrace{x^a y^b z^c}_{\neq 0}(a+b+c) - \lambda k \underbrace{(x^k + y^k + z^k)}_{=1} = 0$$

Auflösen liefert $\lambda = \frac{x^a y^b z^c}{k}(a+b+c)$. Einsetzen von λ in (1) multipliziert mit x ergibt

$$a x^a y^b z^c - (a+b+c) x^a y^b z^c x^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{x^a y^b z^c}_{\neq 0}\Big(a - (a+b+c)x^k\Big) = 0$$

Da die Komponenten des gesuchten Maximums positiv sein müssen, muss $x_0 = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{1/k}$ sein. Einsetzen von λ in (2) und (3) ergibt mittels analoger Rechnung wie eben

$$y_0 = \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{1/k} \qquad \text{und} \qquad z_0 = \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{1/k}$$

Somit ist (x_0, y_0, z_0) der einzige Kandidat für ein lokales Maximum. Da die Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0,\ g(x,y,z) = 0\}$ kompakt ist, nimmt $f_{|M}$ Minimum und Maximum an. Allgemein ist $f_{|M} \geq 0$. Ist x, y oder $z = 0$, so ist $f(x,y,z) = 0$, also liegt ein globales Minimum vor. Ansonsten ist f auf M immer größer 0. Somit kann der Punkt (x_0, y_0, z_0) nur das globale Maximum von $f_{|M}$ sein. Der Maximalwert ist

$$\frac{a^{\frac{a}{k}} b^{\frac{b}{k}} c^{\frac{c}{k}}}{(a+b+c)^{\frac{a+b+c}{k}}}$$

Sei nun $k = 1$ und $u, v, w \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\frac{u}{u+v+w} + \frac{v}{u+v+w} + \frac{w}{u+v+w} = 1$$

Da f im Punkt (x_0, y_0, z_0) maximal ist, gilt

$$\left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a \left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b \left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c \leq f(x_0, y_0, z_0) = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit $(u+v+w)^{a+b+c}/(a^a b^b c^c)$ liefert

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

□

Aufgabe 51: Sei $m < n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vom Rang m. Sei $b \in \mathbb{R}^m$. Finden Sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren jene Lösung von $Ax = b$, für die $\|x\|_2$ minimal ist.

Beweis. Wir minimieren $f(x) = \|x\|_2^2$ unter der Nebenbedingung $0 = g(x) := Ax - b$. Es ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\,.$$

Insbesondere ist $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$, d. h. $DG(x) = A$. Die Lagrange-Funktion ist $L(x, \lambda) = \|x\|_2^2 - \sum_{l=1}^m \lambda_l g_l(x)$, d. h. wir betrachten das Gleichungssystem $DL(x, \lambda) = 0 \in \mathbb{R}n + m$:

$$\begin{aligned} 2x_k - \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad &\text{für } k = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad &\text{für } i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Aus den ersten n Gleichungen ergibt sich $x_k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk}$, also $x = \frac{1}{2} A^T \lambda$. Einsetzen in die letzten m Gleichungen liefert

$$b_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lj} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l \sum_{j=1}^n a_{lj} a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (AA^T)_{il} \lambda_l,$$

d. h. $b = \frac{1}{2} AA^T \lambda$. Da A vollen Rang hat, ist AA^T invertierbar, also ist $\lambda = 2(AA^T)^{-1} b$ und somit ist $x = \frac{1}{2} A^T \lambda = A^T (AA^T)^{-1} b$.

Es bleibt zu zeigen, dass x auch ein globales Minimum ist. Die Mengen $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = g^{-1}(0)$ ist abgeschlossen und die Menge $K = \{(0, \dots, 0)\} \in \mathbb{R}^n$ ist kompakt, also gibt es nach Aufgabe 19 ein $\tilde{x} \in M$, sodass $\|\tilde{x}\|_2 \leq \|y\|_2$ ist für alle $y \in M$. Also gibt es einen Punkt aus M für den die euklidische Norm minimal ist. Dieser Punkt muss $x = A^T (AA^T)^{-1} b$, da er der einzige Kandidat für ein Extremum ist. $\square$

Aufgabe 52: Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar sind, so gilt in einem lokalen Minimum x_0 von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$

$$v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0) \right) v \geq 0 \quad \text{für alle } v \in \text{Ker } Dg(x_0) \, .$$

Hierbei sind λ_i die Lagrange-Multiplikatoren zu x_0.

Beweis. Sei $v \in \ker Dg(x_0)$, I ein offenes Intervall, $M = \{x : g(x) = 0\}$ und $x : I \to M$ ein zweimal stetig differenzierbarer Weg mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v$. Da in $t = 0$ ein lokales Minimum von $\varphi(t) := f(x(t))$ vorliegt, gilt

$$0 \leq \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \varphi(t) \bigg|_{t=0} = \left(\dot{x}(t)^T \nabla^2 f(x(t)) \dot{x}(t) + \nabla f(x(t)) \ddot{x}(t) \right) \big|_{t=0} = v^T \nabla^2 f(x_0) v + \nabla f(x_0) \ddot{x}(0) \tag{1}$$

Differenzieren wir nun $0 = \lambda^T g(x(t)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x(t))$ zweimal nach t und werten es bei $t = 0$ aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\dot{x}(t)^T \nabla^2 g_i(x(t)) \dot{x}(t) + \nabla g_i(x(t)) \ddot{x}(t) \right) \big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(v^T \nabla^2 g_i(x_0) v + \nabla g_i(x_0) \ddot{x}(t) \right) \, . \end{aligned}$$

Subtrahieren wir nun (1) und (**??**), so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\le v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0)\right) v + \underbrace{\left(\nabla f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g(x_0)\right)}_{=0 \text{ wg notw. Bed.}} \ddot{x}(0) \\ &= v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0)\right) v. \end{aligned}$$

Da $v \in \ker DG(x_0)$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 53:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0 \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a < b < c < d$. Zeigen Sie: Es gibt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (b, c) \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, a) \cup (d, \infty) \end{cases}$$

und ϕ streng monoton auf (a, b) und (c, d).

Hinweis zu (b): Mit Hilfe der Funktion f aus Teil (a) bauen Sie zuerst eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die für $x < 0$ verschwindet, für $x > 1$ konstant 1 ist, und auf $(0, 1)$ monoton steigend ist.

Beweis. (a) Wir zeigen, dass für $x > 0$ die k-te Ableitung von der Form $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ ist mit einem Polynom p_k. Für $k = 0$ ist dies klar $p_0 = 1$. Im Induktionsschritt differenzieren wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) &= \frac{d}{dx} p_k \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= p_k' \left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + p_k(x) e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} p_k' \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} p_k \left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} =: p_{k+1} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right)\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch, dass $f^{(k)}(0) = 0$, da die Exponentialfunktion schneller fällt als jedes Polynom. Genauer: Der Differenzenquotient für die $k+1$-te Ableitung ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} p_k \left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}} = \lim_{x \to +\infty} x p_k(x) e^{-x} = 0.$$

(b) Betrachte die Funktion $\phi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \phi_0(x) = e^e f(f(1) - f(1 - x))$. Ist $x \le 0$, so ist $1 - x > 1$, also gilt wegen der Monotonie von f, dass $f(1) - f(1 - x) < 0$ ist, was wiederum $f(f(1) - f(1 - x)) = 0$ impliziert.

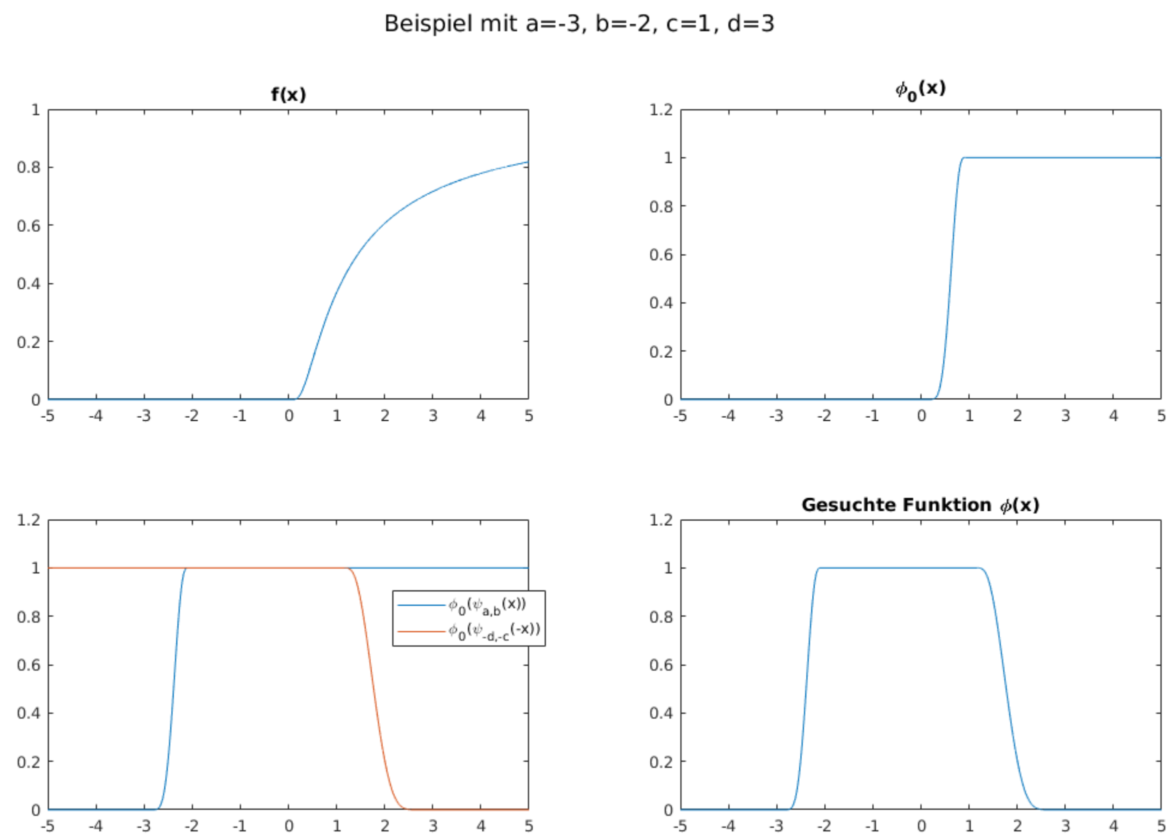
Ist $x > 1$, so ist $1 - x < 0$, also $f(1-x) = 0$ und somit $e^e f(f(1) - f(1-x)) = e^e f(f(1)) = e^e e^{-e} = 1$. Die Funktion ϕ_0 ist als Komposition glatter Funktionen wieder glatt. Außerdem ist für $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\phi_0'(x) &= e^e f'(f(1) - f(1-x)) \cdot (-f'(1-x) \cdot (-1)) \\ &= e^e (f(1) - f(1-x))^{-2} \exp\left(-(f(1)-f(1-x))^{-1}\right) \cdot (1-x)^{-2} \exp\left(-(1-x)^{-1}\right) \\ &> 0.\end{aligned}$$

Somit ist ϕ_0 auf $(0,1)$ streng monoton wachsend. Betrachte nun die Abbildung $\psi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$. Diese bildet das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf $[0,1]$ ab. Setze nun $\phi_1(x) = \phi_0 \circ \psi_{a,b}(x)$. So ist diese Abbildung für $x < a$ konstant 0 und für $x > b$ konstant 1. Im Intervall (a,b) ist ϕ_1 streng monoton wachsend, da $\phi'(x) = \phi_0'(\frac{x-a}{b-a}) \cdot \frac{x}{b-a} > 0$ ist. Schließlich setzen wir $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \phi_0(\psi_{a,b}(x))\phi_0(\psi_{-d,-c}(-x)).$$

Definiert man ϕ wie oben, so erfüllt es die gewünschten Eigenschaften. $\square$



Aufgabe 54: Es werde das Variationsproblem

$$\int_a^b f\left(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x)\right) dx \quad \text{minimal!}$$

mit den Randbedingungen $y(a) = \alpha_0,\ y'(a) = \alpha_1,\ y(b) = \beta_0,\ y'(b) = \beta_1$ betrachtet. Zeigen Sie: Falls f und y genügend oft stetig differenzierbar sind, ist eine notwendige Bedingung für das Minimum die Euler-Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0\,,$$

wobei die Funktionen in $(x, y(x),\ y'(x),\ y''(x))$ mit $x \in [a,b]$ auszuwerten sind.

Beweis. Sei $v \in C^2[a,b]$ mit $v(a) = v(b) = v'(a) = v'(b) = 0$ und t in einem Intervall um 0. Setze

$$\varphi(t) := F(y+tv) = \int_a^b f(x, y(x)+tv(x), y'(x)+tv'(x), y''(x)+tv''(x))\mathrm{d}x$$

Ist y eine Lösung des Variationsproblems, so ist y Minimum von F, also 0 ist Minimum von φ. Folglich ist $\dot{\varphi}(0) = 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \dot{\varphi}(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \int_a^b f(x, y(x)+tv(x), y'(x)+tv'(x), y''(x)+tv''(x))\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(x, y(x)+tv(x), y'(x)+tv'(x), y''(x)+tv''(x))\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{KR}}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\%)v(x) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}(\%)}_{\textit{ableiten}} \underbrace{v'(x)}_{\textit{integrieren}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y''}(\%)}_{\textit{abl.}} \underbrace{v''(x)}_{\textit{int.}} \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{p.I}}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\%)v(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}(\%)v(x) - \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}(\%)}_{\textit{abl.}} \underbrace{v'(x)}_{\textit{int.}} \right) \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}(\%)v(x)\bigg|_a^b}_{=0 \text{ nach VS}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y''}(\%)v'(x)\bigg|_a^b}_{=0 \text{ nach VS}} \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\%) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}(\%) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\partial f}{\partial y''}(\%) \right) v(x)\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial dy''}(\%)v(x)\bigg|_a^b}_{=0},
\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ für (III, §10) steht und % abkürzend für $(x, y(x), y'(x), y''(x))$. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt die Behauptung. $\square$

Abgabe über URM bis zum 29.06.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 05.07.-07.07.2021.