Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.05.2021

4. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 19: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $K \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Die Abstandsfunktion $x \mapsto d(x, A) := \inf \{\|x - a\|; a \in A\}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Es gibt ein $b \in A$, so dass $d(x, A) = \|x - b\|$. Das obige Infimum ist also ein Minimum.

(c) Es gibt ein $q \in K$ und ein $c \in A$ mit

$$d(K, A) := \inf \{d(x, A); x \in K\} = d(q, A) = \|q - c\| (> 0) \,.$$

(d) Geben Sie ein Beispiel abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $d(B, A) = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie den Graph einer geeigneten Funktion.

Aufgabe 20: Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$f : \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{x}{1 - \|x\|}$$

ein Homöomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Fall $n = 1$.

Aufgabe 21: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass $f : K \to f(K)$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Hausdorff' Charakterisierung der Stetigkeit.

Aufgabe 22: Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien weiters eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$ gegeben. Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x) \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) dx.$$

Aufgabe 23: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\|x\|)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 24: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}^m$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}^m$ konvergieren. Zeigen Sie, dass f auch stetig ist.

Abgabe über URM bis zum 18.05.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 19.-21.05.2021.