

2. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 7: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm. Zeigen Sie

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| .$$

Aufgabe 8: Zeigen Sie: Für jedes $p \geq 1$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty .$$

Insbesondere gilt daher

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

Aufgabe 9: Zeigen Sie: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $p \mapsto \|x\|_p$ auf $[1, \infty)$ monoton fallend.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ genau dann bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen $a \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, wenn sie bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 11: Zeigen Sie für $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} \\ \overline{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid M \text{ hat nichtleeren Durchschnitt mit jeder Umgebung von } x\} . \end{aligned}$$

Aufgabe 12: Zeigen Sie für $A, B \subset \mathbb{R}^n$:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad , \quad (A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} .$$

Geben Sie Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ an, für die

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad (A \cup B)^\circ \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} .$$

**Abgabe über URM bis zum 04.05.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 10.-12.05.2021.**