

0. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 1: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Aufgabe 2: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|xy| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\varepsilon} + \varepsilon y^2 \right)$$

gilt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\arctan(x)$ konvex ist.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x) - \ln(x)$ konvex ist.

Schließen Sie daraus die verallgemeinerte Ky-Fan-Ungleichung: Für $x_1, \dots, x_n \in (0, \frac{1}{2})$ und $\theta_1, \dots, \theta_n$ mit $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ gilt

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\theta_i}}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)^{\theta_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i x_i}{\sum_{i=1}^n \theta_i (1-x_i)}.$$

Hinweis: Jensen' Ungleichung