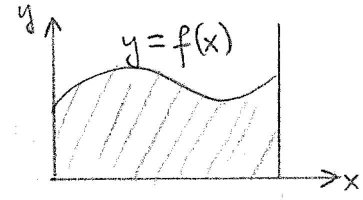
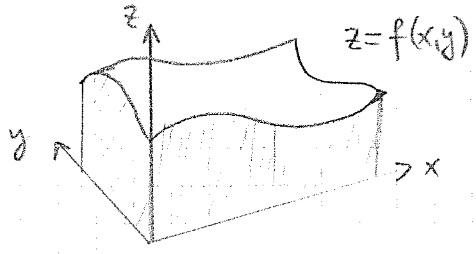
V. Mehrdimensionale Integration

$$\int_A f(x_1,\dots,x_n)\, d(x_1,\dots,x_n) \qquad , \qquad A \subset \mathbb{R}^n$$

$n=1$



Fläche unter Kurve



$n=2$

Volumen unter Fläche

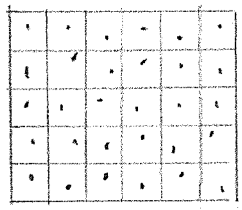
1 Integrale stetiger Funktionen über Quader

n-dim. Quader $\quad Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$

($n=1$: Intervall , $n=2$ Rechteck) kartes. Produkt abg. Intervalle

Volumen (Maß) $\quad \mu(Q) = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$

betrachte Funktion $\quad f: Q \to \mathbb{R}$



zerlege Q in Teilquader $\quad Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$

$\quad Q_j$ Quader, $\quad \mathring{Q}_j \cap \mathring{Q}_k = \emptyset \quad j \neq k$

in jedem Teilquader wähle Punkt $\quad \xi_j \in Q_j$

<u>Zerlegung</u> mit ausgez. Punkten $D = (Q_j, \xi_j)_{j=1}^{N}$, $|D| = \max\limits_{j=1,\dots,n} \text{diam}\,\cancel{\mu}(Q_j)$

$$S(D) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\,\mu(Q_j) \qquad \text{Riemann-Summe}$$

($n=1$: wie gehabt)

<u>Satz und Def:</u> Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ Es gibt ein $s \in \mathbb{R}$, sodaß

(*) $\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \;\forall$ Zerlegung D mit $|D| < \delta$: $|S(D) - s| < \varepsilon$

bez. $\int_Q f(x)\,dx = \int_Q f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_n) := s \quad$ <u>Integral von f über Q</u>

$n=2$ auch $\iint\limits_Q f(x,y)\,d(x,y)$, $n=3$ auch $\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,d(x,y,z)$

Beweis des Satzes genau wie für $n=1$: Anal. I, Kap III, §5
(wesentlich : $f: Q \to \mathbb{R}$ glm stetig, s. II, §5)

Satz 2: Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig, $Q = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$
$\Longrightarrow$

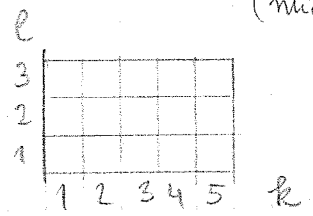
$$\int\limits_Q f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n \right) dx_{n-1} \ldots dx_1$$

iteriertes Integral

Beweis: zeige für $\underset{\displaystyle x\ =\ (y,z)}{Q \ni} = R \times S$ (R, S Quader)

$$\int\limits_{R\times S} f(y,z)\,d(y,z) = \int\limits_R \int\limits_S f(y,z)\,dz\,dy$$

daraus folgt Beh.
(mit Induktion



Zerlegung $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \bigcup\limits_{\ell=1}^{L} R_k \times S_\ell$

ausgez. Punkt $\xi_j = (\eta_k, \zeta_\ell) \in R_k \times S_\ell$

$$\mu(R_k \times S_\ell) = \mu(R_k)\,\mu(S_\ell)$$

bez. $F(y) = \int\limits_S f(y,z)\,dz$, $F: R \to \mathbb{R}$ stetig (II, §5)

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$\left| \int\limits_{R\times S} f(y,z)\,d(y,z) - \int\limits_R \int\limits_S f(y,z)\,dz\,dy \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{R\times S} f(y,z)\,d(y,z) - \sum_{k=1}^{K} \sum_{\ell=1}^{L} f(\eta_k,\zeta_\ell)\,\mu(R_k \times S_\ell) \right| +$$

$$\left| \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{\ell=1}^{L} f(\eta_k,\zeta_\ell)\,\mu(S_\ell) - \int\limits_S f(\eta_k,z)\,dz \right) \mu(R_k) \right| +$$

$$\left| \sum_{k=1}^{K} F(\eta_k)\,\mu(R_k) - \int\limits_R F(y)\,dy \right| < \varepsilon + \varepsilon\,\mu(R) + \varepsilon$$

falls Zerlegung genügend fein

2 Integrale unstetiger Funktionen, Nullmengen

Sit: $f : Q \to \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader

Def: f heißt (Riemann-) integrierbar, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $(*)$ von §1, §1 gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall D, |D| < \delta : \ |S(D) - s| < \varepsilon$$

bez. $\int_Q f(x)\,dx := s$

Kriterium für Integrierbarkeit?

vermute: beschränkte Funktion f integrierbar, falls Menge der Unstetigkeitspunkte von f "klein" ?

Def: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Jordan-) Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Quader Q_k $(k = 1, \dots, K)$ gibt, sodaß

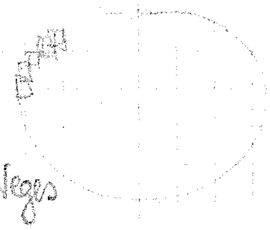
$$X \subset \bigcup_{k=1}^{K} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{K} \mu(Q_k) < \varepsilon$$

Bsp: $n = 1$: endliche Mengen ✓

(x_k) konvergente Folge $\Rightarrow$ $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ Nullmenge

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ keine Jordan-Nullmenge

$n = 2$: Kreisrand



(hinreichend anschaulich plausibel)

Bild eines stetig diffbaren Weges

aber: $[0,1] \times [0,1]$ = Bild der (stetigen) Peano-Hilbert-Kurve ist keine Nullmenge

wichtiges Kriterium:

HS: Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ beschränkte Menge, $d < n$,
$\varphi : B \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ($\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leq L \|s-t\|_\infty \ \forall s,t \in B$)
$\Rightarrow$ Bild $\varphi(B)$ ist Nullmenge.

Beweis: B enthalten in d-dim. Würfel W mit Seitenlänge b
unterteile W in m^d Würfel W_k der Seitenlänge $\frac{b}{m}$
für $s,t \in W_k \cap B$: $\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leq L\|s-t\|_\infty \leq L\frac{b}{m}$,
d.h. $\varphi(W_k \cap B)$ enthalten in n-dim. Würfel der Seitenlänge $L\frac{b}{m}$
$\Rightarrow$ $\varphi(B)$ enthalten in Vereinigung von m^d n-dim. Würfeln Q_k dieser Seitenlänge, und

$$\sum_{k=1}^{m^d} \mu(Q_k) \leq \sum_{k=1}^{m^d} \left(\frac{Lb}{m}\right)^n = m^d \frac{(Lb)^n}{m^n} < \varepsilon,$$

falls m genügend groß $\square$

Bsp: $n=2$ Kreisrand $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Satz 1: Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion ($|f(x)| \leq M \ \forall x \in Q$)
Falls die Menge der Unstetigkeitspunkte von f,
$X = \{x \in Q \mid f \text{ unstetig in } x\}$, eine Nullmenge ist,
so ist f integrierbar.

Bem. und Bez: falls R endliche Vereinigung von Quadern, so kann R auch als endliche Vereinigung von Quadern mit paarweise disjunkten Quadern geschrieben werden: $R = \bigcup_{i=1}^{I} R_i$, R_i Quader, $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$
def. $\mu(R) = \sum_{i=1}^{I} \mu(R_i)$ (wohldef.)

für $\rho > 0$ setze $H_\rho(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in R : \|x-y\|_\infty \leq \rho\}$ ρ-Hülle von
mit R ist auch $H_\rho(R)$ endl. Vereinigung von Quadern

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ geg.

(a) X Nullmenge $\Rightarrow$ $\exists\, R$ endl. Vereinigung von Quadern mit

$$X \subset R, \quad \mu(R) < \varepsilon$$

f stetig auf $K := \overline{Q \setminus R}$

K endl. Vereinigung von Quadern, kompakt

$\Rightarrow$ f glm. stetig auf K

$\Rightarrow$ $\exists\, \rho > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in K$ mit $\|x_2 - x_1\|_\infty \leq \rho$: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

i.f. o.E. $\rho < \varepsilon$

(b) Regularisierung von f:

für $x \in Q$ bez. Quader $Q_\rho(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|y - x\|_\infty \leq \frac{\rho}{2} \right\}$

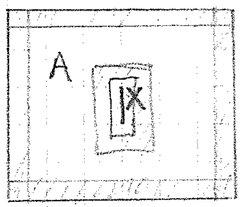
haben $\mu(Q_\rho(x)) = \rho^n$

Sei $K = \bigcup_{\ell=1}^{L} K_\ell$, K_ℓ Quader mit paarw. disjunkten Inneren

def. $f_\rho : Q \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\rho(x) = \frac{1}{\rho^n} \sum_{\ell=1}^{L} \int_{Q_\rho(x) \cap K_\ell} f(y)\, dy$$

($f_\rho(x)$ ist Mittelwert der Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ über $Q_\rho(x)$



Eigenschaften von f_ρ:

(i) f_ρ stetig auf Q

(ii) f_ρ beschränkt (wie f durch M)

Mit $S = H_\rho(R) \cup H_\rho(\partial Q)$, $B = Q \cap S$, $A = Q \setminus B$ gilt:

(iii) $\forall x \in A$: $|f_\rho(x) - f(x)| < \varepsilon$

beachte weiter: $\mu(B) < C\varepsilon$, wobei C nur von max. Seitenlänge von Q und Dim. n abhängt

(verwende hier $\rho < \varepsilon$)

(i), (ii) leicht (Ü), zeige (iii):

für $x \in A$ habe $\quad f_\varrho(x) = \frac{1}{\varrho^n} \int_{Q_\varrho(x)} f(y)\,dy$

$$\int_{Q_\varrho(x)} 1\,dy = \mu(Q_\varrho(x)) = \varrho^n \,, \qquad \text{somit:}$$

$$f_\varrho(x) - f(x) = \frac{1}{\varrho^n} \int_{Q_\varrho(x)} f(y)\,dy - \frac{1}{\varrho^n} \int_{Q_\varrho(x)} f(x)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\varrho^n} \int_{Q_\varrho(x)} \big(f(y) - f(x)\big)\,dy$$

wegen $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für $y \in Q_\varrho(x)$ folgt mit Δ-Ungl. für Int.

$$|f_\varrho(x) - f(x)| < \frac{1}{\varrho^n} \int_{Q_\varrho(x)} \varepsilon\,dy = \varepsilon$$

(c) Sei $D = (Q_j, \xi_j)_{j=1}^N$ Zerlegung von Q

$S(f, D)$ Riemann-Summe von f zu D

$S(f_\varrho, D)$ — " — f_ϱ — " —

wissen (nach S.1, §1): $\quad \left| S(f_\varrho, D) - \int_Q f_\varrho(x)\,dx \right| < \varepsilon$,

falls Zerlegung D genügend fein ($|D| < \delta$ für ein $\delta > 0$)

betrachte

$$|S(f, D) - S(f_\varrho, D)| = \left| \sum_{j=1}^N \big(f(\xi_j) - f_\varrho(\xi_j)\big)\, \mu(Q_j) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j:\, \xi_j \in A} \underbrace{|f(\xi_j) - f_\varrho(\xi_j)|}_{< \varepsilon} \mu(Q_j) + \sum_{j:\, \xi_j \in B} \underbrace{|f(\xi_j) - f_\varrho(\xi_j)|}_{\leq 2M} \mu(Q_j)$$

$$< \varepsilon\, \mu(Q) + 2M\, \mu(H_\varepsilon(B)) \leq C_1 \varepsilon$$

falls $|D| < \varepsilon$ $\qquad$ nur abh. von Q, ...

somit für bel. Zerl. D, D' mit $|D| < \delta$, $|D'| < \delta$:

$$|S(f,D) - S(f,D')| \leq |S(f,D) - S(f_\delta,D)| +$$

$$+ \left| S(f_\delta,D) - \int_Q f_\delta(y)\,dy \right| + \left| \int_Q f_\delta(y)\,dy - S(f_\delta,D') \right|$$

$$+ |S(f_\delta,D') - S(f,D')|$$

$$< C_1\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + C_1\varepsilon = C_2\varepsilon \qquad (C_2 = 2C_1+2)$$

mit Cauchy' Konvergenzkriterium folgt wie in Anal. I, ~~Kap. III, §5.1~~ IV.2.1

$\exists s\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D, |D| < \delta : |S(f,D) - s| < \varepsilon$ □

Wie im stetigen Fall gilt

<u>Satz 2</u>: Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ Quader

$f : Q \to \mathbb{R}$ sei integrierbar, und für $j = n, n-1, \dots, 1$ existiere

$$\int_{a_j}^{b_j} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \dots dx_j \quad \text{für jedes } (x_1, \dots, x_{j-1}).$$

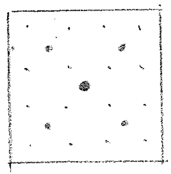
$$\Rightarrow \int_Q f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \dots dx_1$$

<u>Beweis</u>: wie S.2, §1 □

Bem: Existenz des Integrals links impliziert nicht Existenz rechts
rechts links

<u>Bsp</u>: 1) $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x_1,x_2) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2\ell-1}{2^n}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ mit $n,k,\ell \in$



für festes $x_1 \in [0,1]$ gibt es nur endl. viele x_2
mit $f(x_1,x_2) \neq 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2 = 0 \quad \forall x_1 \quad \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 = 0$$

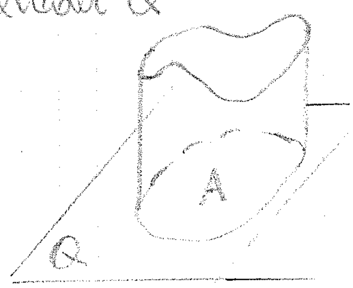
aber: jedes Teilrechteck von $[0,1]^2$ enthält sowohl Punkte mit Funktionswerten 0 als auch 1 $\Rightarrow$ f nicht Riemann-intbar

2) $$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & x_1 = 0, \; x_2 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x_1,x_2) \in [0,1]^2$$

f stetig außerhalb Nullmenge $\{(x_1,x_2) \mid x_1 = 0\}$
aber $\int_0^1 f(0,x_2)\,dx_2$ existiert nicht (als Riemann-Integral

<u>3 Integrale über allgemeinere beschränkte Mengen</u>

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Menge, enthalten in Quader Q
$f : A \to \mathbb{R}$ Funktion
setze f außerhalb A durch 0 fort:



$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in Q \setminus A \end{cases}$$

Falls $F : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, definiere

$$\int_A f(x)\,dx := \int_Q F(x)\,dx ,$$

und f heißt dann <u>integrierbar auf A</u>.

<u>Satz 1</u>: $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Menge, ∂A Nullmenge

$f: A \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt

$\Longrightarrow$ f integrierbar auf A

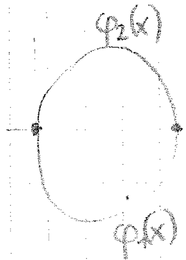
<u>Beweis</u>: nach VS Unstetigkeitsmenge von F enthalten in ∂A

∂A Nullmenge

nach S.1, §2: F integrierbar auf Q $\square$

wichtiger Spezialfall für $n = 2$:

<u>Satz 2</u>: Seien $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig,



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$f: A \to \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow$ f ist auf A integrierbar und

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

<u>Beweis</u>: (a) $\partial A = G_1 \cup G_2$ mit $G_i = \{(x, \varphi_i(x)) \mid a \le x \le b\}$

G_1, G_2 Nullmengen, denn mit $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ gilt:

φ glm. stetig auf $[a,b]$, daher

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $|x_2 - x_1| < \delta$: $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$

o.E. $\delta = \frac{(b-a)}{N}$ mit $N \in \mathbb{N}$

setze $Q_j = [a + (j-1)\delta, a + j\delta] \times [\varphi_j - \varepsilon, \varphi_j + \varepsilon]$ $\quad j = 1, \dots, N$

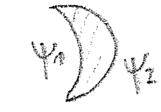
mit $\varphi_j = \varphi(a + j\delta)$

habe $\sum \mu(Q_j) = (b-a)\varepsilon$, $\quad G \subset \bigcup Q_j$ $\Rightarrow$ ∂A Nullmen[ge]

(b) $\displaystyle\int_A f(x,y)\, d(x,y) \underset{\text{Def.}}{=} \int_A F(x,y)\, d(x,y) \underset{\text{S.2, §2}}{=} \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, dy\, dx =$

$\displaystyle = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$ $\square$

entsprechend: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

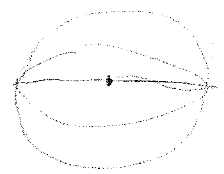


$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

$n = 3$: $A = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\}$

$$\int_A f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Bsp: Volumen der Kugel



$$A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid -r \leq x \leq r,\ -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2},\ -\sqrt{r^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

Volumen $V = \int_A 1\, d(x,y,z) = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx =$

$$= \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dy\, dx =$$

subst. $y = \sqrt{r^2-x^2}\, \sin t$

$dy = \sqrt{r^2-x^2}\, \cos t\, dt$

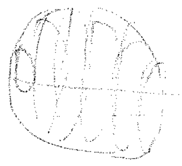
$$= \int_{-r}^{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{r^2-x^2}\, \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \sqrt{r^2-x^2}\, \cos t\, dt\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} 2(r^2-x^2) \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt}_{\pi/2}\, dx$$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\, dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{r} = \frac{4\pi}{3} r^3$$



anders (intelligenter):

$$A = \{ (x,y,z) \mid -r \le x \le r \,,\; (y,z) \in B_x \}$$

$$\text{mit} \quad B_x = \{ (y,z) \mid y^2 + z^2 \le \sqrt{r^2 - x^2} \}$$

Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2-x^2}$

$$\int_A 1 \, d(x,y,z) = \int_{-r}^{r} \underbrace{\int_{B_x} 1 \, d(y,z)}_{(r^2-x^2)\pi} \, dx = \frac{4\pi}{3} r^3$$

Satz 3: Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen, $A \cap B$ Nullmenge

$f : A \cup B \to \mathbb{R}$ sei integrierbar auf $A, B, A \cup B$

$$\Rightarrow \int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$$

Beweis: char. Funktion $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Sei Q Quader, der $A \cup B$ enthält, F Fortsetzung durch 0 von f auf

$$F(x) = \chi_{A \cup B}(x)\, F(x) = \big(\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \big) F(x)$$

Riemann-Summen:

$$\begin{array}{ccccccc} S(F,D) & = & S(\chi_A F, D) & + & S(\chi_B F, D) & - & S(\chi_{A\cap B} F, D) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \int_{A \cup B} f(x)dx & & \int_A f(x)dx & & \int_B f(x)dx & & ? \end{array} \quad \text{für } |D| \to$$

F Riemann-intbar $\Rightarrow$ F beschränkt: $|F(x)| \le M \quad \forall x \in A \cup B$

$$\Rightarrow \; |S(\chi_{A \cap B} F, D)| \le M \, S(\chi_{A \cap B}, D) \to 0 \quad \text{für } |D| \to 0,$$

da nach VS $A \cap B$ Nullmenge

§4 Volumen unter affinen Transformationen

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit ∂A (Jordan-) Nullmenge definiere

$$\mu(A) = \int_A 1\,dx \qquad \text{Volumen von } A$$

(Für Quader Q stimmt $\mu(Q)$ mit früherem überein.)
erhalte für zwei solcher Mengen A, B:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad , \quad \text{falls } A \subset B$$
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad , \quad \text{falls } A \cap B \text{ Nullmenge}$$
(S.3, §3)

betrachte Volumen unter Translation $x \mapsto x + c$, $c \in \mathbb{R}^n$

$$A + c := \{x + c \mid x \in A\}$$

<u>HS</u>: $\mu(A+c) = \mu(A)$ (Translationsinvarianz des Volumens)

<u>Beweis</u>: klar für Quader (Produkt der Seitenlängen)
sonst: Riemann-Summen

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_{A+c}(\xi_j + c) \cdot \mu(Q_j + c) = \sum_{j=1}^{N} \chi_A(\xi_j) \cdot \mu(Q_j)$$

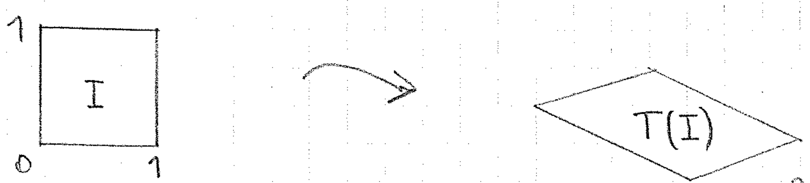
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \quad \text{für } |D| \to 0$$

$$\int_{A+c} 1\,dx \qquad\qquad\qquad \int_A 1\,dx$$

□

Sei nun $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ <u>affine Transformation</u>:

$$T(x) = Gx + c \qquad \left(G \in \mathbb{R}^{n \times n},\ c \in \mathbb{R}^n\right)$$



$I = [0,1]^n$
n-dim. Einheitswürfel

Parallelotop
(n=2: Parallelogramm)

Volumen?

HS: $\mu(T(I)) = |\det G|$

Beweis: $\partial(T(I)) = T(\partial I)$ Nullmenge

schreibe $G = (g_1, \dots, g_n)$, $g_i \in \mathbb{R}^n$

$d(g_1, \dots, g_n) := \mu(T(I))$

Eigenschaften:

(i) $d(g_1, \dots, \alpha g_i, \dots, g_n) = |\alpha| \cdot d(g_1, \dots, g_n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

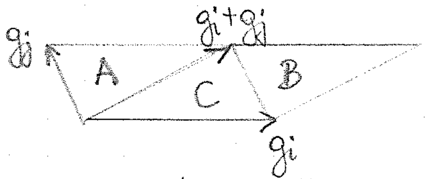
(ii) $d(g_1, \dots, g_i, \dots, g_j + g_i, \dots, g_n) = d(g_1, \dots, g_n)$

(iii) $d(e_1, \dots, e_n) = 1$ $\qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te

zu (i): klar für $\alpha \in \mathbb{Z}$, daraus für $\alpha \in \mathbb{Q}$

$\alpha \mapsto d(g_1, \dots, \alpha g_i, \dots, g_n)$ monoton auf $[0, \infty)$ $\Big\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

zu (ii):



$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k \text{ mit } 0 \le \alpha_k \le 1,\ \alpha_i \le \alpha_j\}$

B, C entsprechend $\qquad B = A + g_i \qquad A \cap C, B \cap C$ Nullm

$d(\dots, g_i, \dots, g_j, \dots) = \mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C)$

$d(\dots, g_i, \dots, g_j + g_i, \dots) = \mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) \underset{HS}{=} \mu(A) + \mu(C$

zu (iii): $d(e_1, \dots, e_n) = \mu(I) = 1$

Mit Transformationen (i), (ii) kann jede Matrix $G = (g_1, \dots, g_n)$ auf $(e_1, \dots, e_n)$ reduziert werden (Gauß-Elimination)

$\Longrightarrow$ $d : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eindeutig durch (i) – (iii) bestimmt

$|\det|$ erfüllt (i) – (iii)

$\Longrightarrow$ $d(g_1, \dots, g_n) = |\det(G)|$, Beh. $\square$

Folgerung: Q Quader $\quad \mu(T(Q)) = |\det G| \, \mu(Q)$

Beweis: $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \tilde{T}(I)$

mit $\tilde{T}(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n - a_n \end{pmatrix}}_{\tilde{G}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\tilde{c}}$

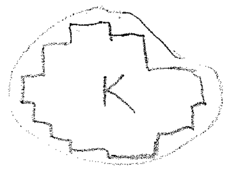
$$\mu(Q) = \mu(\tilde{T}(I)) \underset{HS}{=} |\det \tilde{G}|$$

$$T(Q) = T\tilde{T}(I) \qquad T\tilde{T}(x) = G\tilde{G}x + c + G\tilde{c}$$

$$\Rightarrow \mu(T(Q)) = |\det G\tilde{G}| = |\det G| \cdot |\det \tilde{G}| = |\det G| \, \mu(Q)$$

Satz: Sei $T(x) = Gx + c$ affine Transformation des $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, ∂A Nullmenge

$$\Rightarrow \quad \mu(T(A)) = |\det G| \cdot \mu(A)$$



Beweis: Sei R endl. Vereinigung von Quadern mit

$\partial A \subset R \quad , \quad \mu(R) < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0$ bel.$)$

setze $K = \overline{A \cap R^c}$, ist endl. Vereinigung von Quadern $(\partial K \subset \partial R)$

$K = \bigcup_{\ell=1}^{L} K_\ell$, K_ℓ Quader, $K_\ell \cap K_j$ Nullmenge für $\ell \neq j$

damit auch $T(K_\ell \cap K_j)$ Nullmenge

$$\mu(T(K)) = \mu\Big(\bigcup_\ell T(K_\ell)\Big) = \sum_\ell \mu(T(K_\ell)) \underset{\uparrow \text{oben}}{=}$$

$$= \sum_\ell |\det G| \cdot \mu(K_\ell) = |\det G| \cdot \mu(K)$$

$\partial T(A) = T(\partial A)$ Nullmenge, habe

$$\mu(T(K)) \leq \mu(T(A)) \leq \underbrace{\mu(T(K))}_{|\det G| \cdot \mu(K)} + \underbrace{\mu(T(R))}_{|\det G| \cdot \underbrace{\mu(R)}_{<\varepsilon}}$$

$$\mu(K) \leq \mu(A) \leq \mu(K) + \underbrace{\mu(R)}_{<\varepsilon}$$

Bch.

Bem: falls T Bewegung (G orthogonale Matrix): $|\det G| = 1$

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$ (Bewegungsinvarianz des Volume

Bem:

$$\int_{T(A)} 1 \, dy = \int_A 1 \cdot |\det G| \, dx$$

§5 Transformationssatz

$n=1$: $$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx$$

formal: substituiere $y = g(x)$ (g injektiv: streng monoton)

$$dy = g'(x)\,dx$$

bzw. $$\int_{[g(a),g(b)]} f(y)\,dy = \int_{[a,b]} f(g(x))\,|g'(x)|\,dx$$

Ziel: Substitution in mehrdimensionalen Integralen

beginnen mit einfachstem Fall: affine Transformation, Quader

HS: Sei Q Quader

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin : $T(x) = Gx + c$

$f: T(Q) \to \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow$ $$\int_{T(Q)} f(y)\,dy = \int_Q f(T(x)) \cdot |\det G|\,dx$$

(formal: $y = T(x)$, $dy = |\det DT(x)|\,dx$ $(DT(x) = G)$)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

Q kompakt $\Rightarrow$ $f \circ T$ glm stetig auf Q

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ $\forall x_1, x_2 \in Q$ mit $\|x_2 - x_1\|_\infty < \delta$: $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Sei $D = (Q_j, \xi_j)_{j=1}^N$ Zerlegung von Q in Teilquader der Seitenlänge $< \delta$

setze $\eta_j = T(\xi_j)$ und schreibe

$$\int_{T(Q_j)} f(y)\,dy = \int_{T(Q_j)} f(\eta_j)\,dy + \int_{T(Q_j)} (f(y) - f(\eta_j))\,dy$$

haben

$$\int_{T(Q_j)} f(\eta_j)\,dy = f(\eta_j)\,\mu(T(Q_j)) \underset{\uparrow \atop 64}{=} f(\eta_j)\,|\det G|\,\mu(Q_j)$$

$$\left| \int_{T(Q_j)} (f(y) - f(\eta_j))\,dy \right| \le \int_{T(Q_j)} \underbrace{|f(y) - f(\eta_j)|}_{< \varepsilon}\,dy \le \varepsilon\,\mu(T(Q_j))$$

somit $$\left| \int_{T(Q)} f(y)\,dy - \sum_{j=1}^N f(\eta_j)\,|\det G| \cdot \mu(Q_j) \right| \le \varepsilon \underbrace{\mu(T(Q))}_{\substack{=: C \\ \text{Konstante}}}$$

andererseits auch (Riemann-Summe)

$$\left| \sum_{j=1}^N f(T(\xi_j))\,|\det G| \cdot \mu(Q_j) - \int_Q f(T(x))\,|\det G|\,dx \right| \le C\varepsilon,$$

falls Zerlegung genügend fein ($|D| < \delta'$)

erhalte

$$\left| \int_{T(Q)} f(y)\,dy - \int_Q f(T(x))\,|\det G|\,dx \right| \le 2C\varepsilon \quad , \quad \text{gilt } \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Satz: (Transformationssatz) Euler $n=2$ 1769, Jacobi 1841

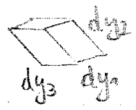
Sei $g: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

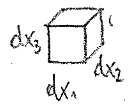
g injektiv auf $A \setminus N$, wobei $A \subset U$ kompakt mit ∂A Nullm., N Nullmenge

$f: g(A) \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Longrightarrow \quad \int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx$$

formal: $y = g(x)$, $\quad dy = |\det Dg(x)|\,dx$





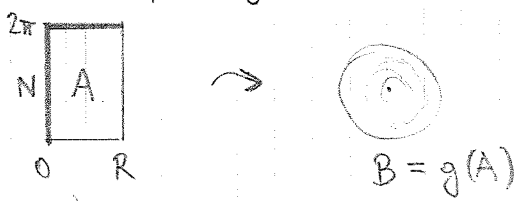
"Volumenelement"

Bsp: Polarkoordinaten

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$A = [0,R] \times [0,2\pi]$$

$$B = g(A) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$$



(im Satz: $y \mathrel{\hat=} (x,y)$, $\quad x \mathrel{\hat=} (r,\varphi)$)

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\underbrace{\left|\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\right|}_{= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r}\,d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\; r\,dr$$

Bsp: Kugelkoordinaten

$$g(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta \\ z &= r\sin\varphi\sin\theta \end{aligned} \qquad A = [0,R]\times[0,\pi]\times[0$$

Kugel $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} = g(A)$

Volumen $\mu(B) = \int_B 1\,d(x,y,z) = \int_A \underbrace{|\det Dg(r,\varphi,\theta)|}_{r^2\sin\varphi}\,d(r,\varphi,\theta)$

$$= \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr = \frac{R^3}{3}\cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3}R^3$$

Beweisidee: auf kleinem Quader Q_j ist

$$g(x) \approx g(q_j) + Dg(q_j)(x-x_j) \quad \text{affine Trf.}$$

wende dort vorigen HS an

setze A aus kleinen Quadern zusammen

beweisen Satz unter stärkerer VS: g <u>zweimal</u> stetig diffbar

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$ bel. $\quad$ (i.f. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$)

(a) Vorbereitung: Abschätzungen von f und g

A kompakt, g stetig $\underset{\text{II},\S 4}{\Longrightarrow}$ $g(A)$ kompakt

f stetig auf $g(A)$

$\underset{\text{II},\S 4}{\Longrightarrow}$ f beschränkt: $|f(y)| \le M \quad \forall y \in g(A)$

nach II, §5: f glm. stetig auf $g(A)$, daher

$\exists\, \delta_1 > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in g(A)$ mit $\|y_2 - y_1\| < \delta_1$: $|f(y_2) - f(y_1)| < \varepsilon$

g stetig diffbar $\Longrightarrow$ Dg stetig $\Longrightarrow$ $\|Dg(x)\| \le M_1 \quad \forall x \in \underset{\text{kp.}}{A}$

Schrankensatz (III, §4): $\|g(x_2) - g(x_1)\| \le M_1 \|x_2 - x_1\| \quad \forall x_1, x_2 \in A$,

deren Verbindungsstrecke in A ist

g zweimal stetig diffbar: Taylorentwicklung (III, §9)

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Dg(x_0)h + R_2(x_0, h)$$

$$\|R_2(x_0, h)\| \le \tfrac{1}{2} M_2 \|h\|^2$$

für x_0, h so, daß Verbindungsstrecke $x_0, x_0 + h$ in A

$$\text{mit} \quad M_2 = \max_{x \in A} \max_{i = 1, \dots, n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right|$$

i.f. bezeichnen $C, C_1, C_2, \dots$ Konstanten, die nur von M, M_1, M_2, (nicht immer dieselben) abhängen

(b) Sei Q Quader, der A enthält

Sei R Vereinigung von Quadern mit $R \supset \partial A \cup N$, $\mu(R) < \varepsilon$

$K := \overline{Q \setminus R}$ Vereinigung von Quadern

zerlege K in Teilquader Q_j mit Seitenlängen zwischen $\delta \leq \frac{\delta_1}{M_1}$ und

sei $\xi_j \in Q_j$ bel.

schreibe $$g(x) = \underbrace{g(\xi_j) + Dg(\xi_j)(x-\xi_j)}_{=: T_j(x)} + \underbrace{R_2(\xi_j, x-\xi_j)}_{=: r_j(x)}$$

T_j affine Trf., $\|r_j(x)\| \leq \frac{1}{2} M_2 \delta^2 =: \rho$

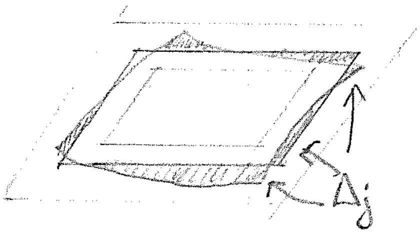
$$\int_{g(Q_j)} f(y)\,dy - \int_{Q_j} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx =$$

$$= \int_{g(Q_j)} f(y)\,dy - \int_{T_j(Q_j)} f(y)\,dy + \quad \text{(I}$$

$$\overset{HS}{=}$$

$$+ \int_{Q_j} f(T_j(x))\,|\det Dg(\xi_j)|\,dx - \int_{Q_j} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx \quad \text{(I}$$

zu (I): bez. $\Delta_j = \{ y \mid y \in T_j(Q_j)$ oder $y \in g(Q_j)$, aber $y \notin g(Q_j) \cap T_j(Q_j) \}$



$\Delta_j \subset H_j := H_\rho(\partial T_j(Q_j))$ ρ-Hülle des Randes

$$\left| \int_{g(Q_j)} f(y)\,dy - \int_{T_j(Q_j)} f(y)\,dy \right| \leq \int_{\Delta_j} \underbrace{|f(y)|}_{\leq M}\,dy$$

$$\leq M \int_{H_j} 1\,dy \leq C_1 \rho\, \delta^{n-1} \leq C_2\, \delta^{n+1} \leq C_3\, \delta\, \mu(Q_j)$$

Bem: ebenso zeige $\partial g(Q_j)$ Nullmenge (Ü) zu (II): $x \in Q_j \implies \| T_j(x) - g(x) \| = \| r_j(x) \| \leq \rho = C\delta_1^2 < \delta_1$,

falls δ_1 gen. klein

$$\implies | f(T_j(x)) - f(g(x)) | < \varepsilon$$

$x \in Q_j \implies | \det Dg(x) - \det Dg(\xi_j) | \leq C \| x - \xi_j \| < C\delta \leq C\varepsilon$

falls $\delta < \varepsilon$ gewählt (o.E.)

damit $\left| \int_{Q_j} f(g(x)) \, |\det Dg(x)| \, dx - \int_{Q_j} f(T_j(x)) \, |\det Dg(\xi_j)| \, dx \right|$

$$\leq \int_{Q_j} C_4 \varepsilon \, dx = C_4 \varepsilon \, \mu(Q_j)$$

(c) g injektiv auf K:

$j \neq k$: $g(Q_j) \cap g(Q_k) = g(Q_j \cap Q_k) \subset g(\partial Q_j)$ Nullm.

damit nach S.3, §3:

$$\int_{g(K)} f(y) \, dy = \sum_{j=1}^{N} \int_{g(Q_j)} f(y) \, dy$$

auch $\int_K f(g(x)) \, |\det Dg(x)| \, dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j} f(g(x)) \, |\det Dg(x)| \, dx$

damit mit Abschätzungen zu (I), (II):

$$\left| \int_{g(K)} f(y) \, dy - \int_K f(g(x)) \, |\det Dg(x)| \, dx \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} C_3 \underbrace{\delta}_{\leq \varepsilon} \mu(Q_j) + \sum_{j=1}^{N} C_4 \, \varepsilon \, \mu(Q_j) \leq C_5 \, \varepsilon \, \mu(K)$$

(d) $\quad g(A) = g(K) \,\dot\cup\, \big(g(A)\setminus g(K)\big)$

$$\Big| \int_{g(A)\setminus g(K)} f(y)\,dy \Big| \leq M\,\mu\big(\underbrace{g(A)\setminus g(K)}_{\subset g(A\setminus K)\,\subset\, g(R)}\big) \leq$$

$$\leq M\,\mu(g(R)) \leq M M_1^n\,\mu(R) < M M_1^n\,\varepsilon$$

$$\Big| \int_{A\setminus K} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx \Big| \leq \int_{A\setminus K} M M_1^n\,dx$$

$$= M M_1^n\,\mu(A\setminus K) \leq M M_1^n\,\mu(R) < M M_1^n\,\varepsilon$$

aus (c) und (d): $\quad \Big| \int_{g(A)} f(y)\,dy - \int_A f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,dx \Big| \leq C\varepsilon,$

gilt $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ Beh.