III. Differenzierbare Funktionen

$f : U \to \mathbb{R}^m \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^n$

1 Begriff der Differenzierbarkeit

Erinnerung: $\mathbb{R}^1$ $\qquad f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in (a,b)$

f diffbar in $x_0 \iff f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert (Cauchy)

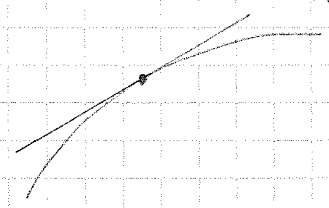
$\iff \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0)\,,$ (Weierstraß)

wobei r stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$

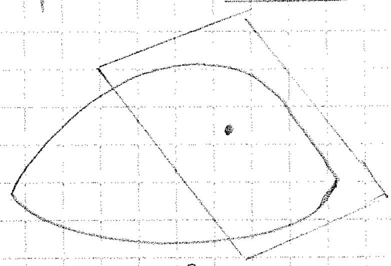
$\iff \quad f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0)\,,$ (Carathéodory)

wobei φ stetig in x_0 , $\varphi(x_0) = f'(x_0)$

Grundidee: lokale Approximation von f durch lineare Funktion



$n=1$



$n=2$

Im folgenden sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ Funktion, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$

Def: (Stolz 1887, Fréchet 1906)
f heißt differenzierbar in x_0, falls es
eine lineare Abbildung $f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und
eine in x_0 stetige Funktion $r : U \to \mathbb{R}^m$ mit $r(x_0) = 0$
gibt, sodaß für alle $x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x) \cdot \|x - x_0\| \,. \qquad (*)$$

Die lineare Abb. $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0.

Bez: $Df(x_0)$ (oder auch $f'(x_0)$) für zugehörige Matrix (bzgl. Standardbasis)

$$f'(x_0)v = Df(x_0)v \quad , \quad Df(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

Bem: f diffbar in x_0 $\Rightarrow$ f stetig in x_0 (unmittelbar aus Def.)

Satz 1: Falls f in x_0 diffbar ist, gilt

$$f'(x_0)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n .$$

(Insbes. ist $f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.)

Beweis: nach (*) mit $x = x_0 + tv$ ist

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - f'(x_0)tv}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - f'(x_0)v$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{t\to 0} r(x_0+tv)\cdot \|v\|} = 0 \qquad \square$$

Def: Der Grenzwert $\partial_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$

heißt Richtungsableitung von f in Richtung v.

Bem: $\partial_v f(x_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x_0+tv) \left(= g'(0) = \begin{pmatrix} g_1'(0) \\ \vdots \\ g_m'(0) \end{pmatrix} \text{ mit } g(t) = f(x_0+tv) \right)$

Bsp: 1) f affin: $f(x) = Ax + b$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$f'(x_0)v = Av$ erfüllt (*) mit $r(x) = 0 \quad \forall x$

$Df(x_0) = A$

2) f quadratisch: $f(x) = x^T A x \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (m=1

$$f(x_0+tv) = (x_0+tv)^T A (x_0+tv) = x_0^T A x_0 + t\,(\underbrace{v^T A x_0}_{= x_0^T A^T v} + x_0^T A v) + t^2 v^T A$$

somit $\partial_v f(x_0) = x_0^T (A^T + A) v$.

überprüft: lineare Abb. $f'(x_0)$ def. durch $f'(x_0)v = \partial_v f(x_0)$

erfüllt (*): $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)v = (x-x_0)^T A (x-x_0)$ ✓

habe $Df(x_0) = x_0^T(A^T + A)$

Vorsicht! Aus Existenz sämtlicher Richtungsableitungen folgt noch nicht die Differenzierbarkeit von f.

Gegenbsp: (unstetige Funktion, für die alle Richtungsabl. existieren)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & = \end{cases}$$

Für $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ ist

$$g(t) = f(tv) = \frac{t \cos^2\theta \sin\theta}{t^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta} \quad \text{diffbar in } t = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

also existiert $\partial_v f(0,0) = g'(0)$,

aber: $f(x_1, a x_1^2) = \dfrac{a}{1+a^2} \not\to 0$ für $x_1 \to 0$, falls $a \neq 0$

somit f unstetig in $(0,0)$

HS2: f diffbar in x_0 $\Longleftrightarrow$ Komponenten f_j $(j = 1, \dots, m)$ diffbar in

Beweis: $r(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$ stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$

$\underset{\text{II}, §1}{\Longleftrightarrow}$ Komponenten r_j stetig in x_0, $r_j(x_0) = 0$ $\square$

beachte: $f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$

haben auch wieder Carathéodory' Formulierung:

HS 3: f diffbar in x_0

$\Longleftrightarrow$ Es gibt eine in x_0 stetige, matrixwertige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0).$$

Es ist dann $Df(x_0) = \varphi(x_0)$.

Beweis: ($\Leftarrow$) setze $Df(x_0) = \varphi(x_0)$, $\quad r(x) = (\varphi(x) - \varphi(x_0)) \dfrac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$

haben dann (*)

da $\left\| \dfrac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \right\| = 1$, φ stetig in x_0 : r stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$

($\Longrightarrow$) Es gelte (*). Setze $\varphi(x_0) := Df(x_0)$,

$$\underset{m\times n}{\varphi(x) := Df(x_0)} + \underset{m\times 1}{r(x)} \underset{1\times n}{\frac{(x-x_0)^T}{\|x-x_0\|_2}} \qquad \text{für } x \neq x_0$$

wegen $(x-x_0)^T(x-x_0) = \|x-x_0\|_2^2$ erhalte

$$\varphi(x)(x-x_0) = Df(x_0)(x-x_0) + r(x)\|x-x_0\|_2$$

φ stetig in x_0, denn (i,j)-ter Eintrag:

$$\varphi_{ij}(x) = (Df)_{ij}(x_0) + \underbrace{r_i(x)}_{\to 0} \underbrace{\frac{(x_j - x_{0j})}{\|x - x_0\|_2}}_{\|\cdot\| \leq 1} \to (Df)_{ij}(x_0) = \varphi_{ij}(x_0)$$

also φ_{ij} stetig in x_0 $\forall i,j$, daher nach Kap. II, §2: φ stetig in x_0

$\square$

Bem: $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt diffbar, falls f diffbar in jedem $x_0 \in U$

" stetig diffbar, "

und $Df : U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ stetig

2 Partielle Ableitungen

Sit. wie zuvor: $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$, $x_0 = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

falls f diffbar in x_0, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te}$

$$f'(x_0)v = f'(x_0) \sum_{j=1}^n v_j e_j = \sum_{j=1}^n f'(x_0) e_j \cdot v_j$$

$$= \left[f'(x_0)e_1, \dots, f'(x_0)e_n \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Df(x_0)\, v$$

nach S.1, §1: $f'(x_0)e_j = \partial_{e_j} f(x_0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} =$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

Ableitung von $f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n)$ an der Stelle a_j,

heißt <u>partielle Ableitung</u> von f nach x_j an der Stelle x_0

Bez: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ oder $\partial_j f(x_0)$ $\quad$ (statt $\partial_{e_j} f(x_0)$)

haben $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix}$

erhalten somit für die Abbildungsmatrix $Df(x_0)$ zu $f'(x_0)$:

<u>Satz 1</u>: Falls f in x_0 diffbar, ist

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix},$$

heißt <u>Jacobi-Matrix</u> (oder <u>Funktionalmatrix</u>) von f

beachte: $Df(x_0)$ berechnet sich durch Differentiation von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

wissen aus Gegenbsp in §1: aus Existenz der partiellen Ableitungen (= Richtungsableitungen in Richtung der e_j, $j=1,\dots,n$) folgt noch nicht Differenzierbarkeit.

Es gilt aber

Satz 2: (Hauptkriterium für Differenzierbarkeit)
Existieren in einer Umgebung von x_0 alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ und sind diese in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.

Beweis: $x_0 \in U$, U offen $\Rightarrow$ U Umgebung von x_0
$\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$, sodaß Würfel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_\infty < \delta\} \subset U$
Sei x in diesem Würfel.
schreibe für $x_0 = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $i = 1, \dots, m$:

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \Big(f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - f_i(a_1, \dots, a_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \Big)$$

wende Mittelwertsatz auf jede der Differenzen an:
$\exists\ \xi_{ij}$ zwischen x_j und a_j, sodaß

$$f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{j-1}, \xi_{ij}, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=:\ \varphi_{ij}\ \in\ \mathbb{R}} \cdot (x_j - a_j)$$

setze $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, habe $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$

da nach VS partielle Abl. stetig in x_0: φ stetig in x_0

nach HS 3, §1: f diffbar in x_0 □

<u>Bsp</u>: $f(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = -2x_1\, e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -2x_2\, e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

überall stetig

$\Rightarrow$ f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ diffbar, und

$$Df(x) = \left(-2x_1\, e^{-(x_1^2+x_2^2)},\ -2x_2\, e^{-(x_1^2+x_2^2)}\right)$$

3 Kettenregel

(Anwendung: Orthogonalität von Gradient und Niveaulinien)

<u>Satz</u>: (Kettenregel) Sei $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^\ell$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

f diffbar in x_0, g diffbar in $y_0 := f(x_0)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ diffbar in x_0, und

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0) \qquad \text{(Hintereinanderausf. linearer Abb.)}$$

bzw. $D(g\circ f)(x_0) = Dg(y_0)\, Df(x_0)$ (Matrizenprodukt)

<u>Beweis</u>: wie in $\mathbb{R}^1$ verwende Carathéodory' Formulierung (HS 3, §1)

$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0)$, φ stetig in x_0, $\varphi(x_0) = Df$

$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y-y_0)$, ψ stetig in y_0, $\psi(y_0) = Dg($

setze $y = f(x)$:

$$g(f(x)) = g(y_0) + \underbrace{\psi(f(x))\,\varphi(x)}_{\text{stetig in } x_0}(x-x_0)$$

$\psi(f(x_0))\,\varphi(x_0) = Dg(y_0)\, Df(x_0)$

Bsp: Gradient und Niveaulinien

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diffbar in $U \subset \mathbb{R}^n$

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$Df(x)v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, v_j = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ euklid' Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ und

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = Df(x)^T$$ <u>Gradient</u> von f in x

(oft auch: $\operatorname{grad} f(x)$)

Sei $\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^n$ Weg (I Intervall), γ diffbar

$$\dot\gamma(t) := D\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \dot\gamma_j = \frac{d\gamma_j}{dt}$$

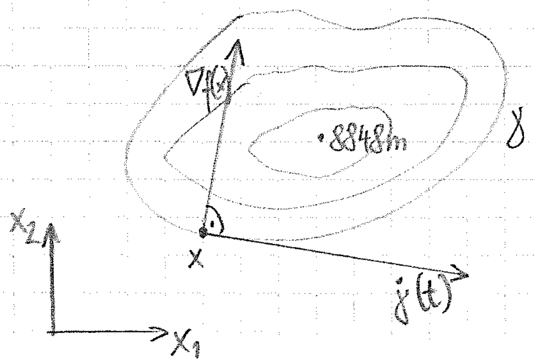
$t \in I$, $x = \gamma(t)$

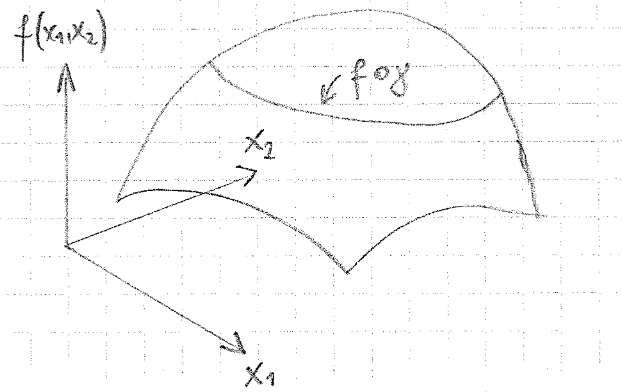
$$D(f\circ\gamma)(t) \underset{S.1}{=} Df(x)\, D\gamma(t)$$

$$= \langle \nabla f(x), \dot\gamma(t) \rangle$$

Sei γ Niveaulinie von f, d.h., $f(\gamma(t)) = C \quad \forall t \in I$
(Höhenlinie)

C ← Konstante



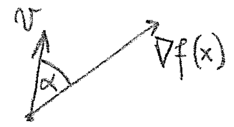


$$\Longrightarrow \quad \underset{\langle \nabla f(x), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\underset{\shortparallel}{D(f\circ\gamma)(t)}} = \frac{d}{dt} C = 0$$

d.h., Gradient $\nabla f(x)$ ist orthogonal auf Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ der Niveaulinie

Sei γ bel. diffbarer Weg, $v = \dot{\gamma}(t)$, $\|v\| = 1$

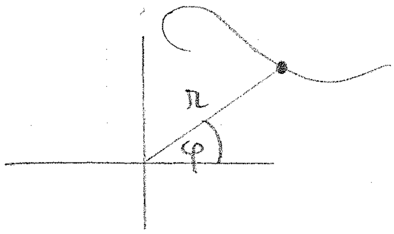
$$D(f\circ\gamma)(t) = \langle \nabla f(x), v \rangle = \|\nabla f(x)\|_2 \cdot \|v\|_2 \cdot \cos\alpha$$



$|D(f\circ\gamma)(t)|$ maximal, falls $\alpha = 0$

anders: Gradient $\nabla f(x)$ ~~zeigt~~ in Richtung des steilsten Anstiegs
bzw. $-\nabla f(x)$ — " — Abstiegs

<u>Bsp:</u> Bewegung eines Massepunktes in kartesischen und Polarkoordinaten



$r(t)$ Radius zur Zeit t
$\varphi(t)$ Winkel — " —

$$f(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

kartes. Koordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = g(r,\varphi)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = (g\circ f)(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos\varphi(t) - r(t)\sin\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \\ \dot{r}(t)\cos\varphi(t) + r(t)\cos\varphi(t)\,\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

Produktregel in $\mathbb{R}$

Geschwindigkeit in kartes. Koordinaten

oder aus Kettenregel:

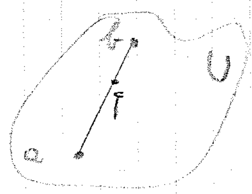
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = D(g\circ f)(t) = Dg(f(t))\, Df(t)$$

$$Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$Df(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -r(t)\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & r(t)\cos\varphi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

4 Mittelwertsatz und Schrankensatz



Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \underline{\mathbb{R}}$ diffbar

Seien a, b Punkte in U, deren Verbindungsstrecke in U liegt:

$$[a,b] := \{ a + t(b-a) \mid t \in [0,1] \} \subset U$$

$\Longrightarrow \quad \exists\, \xi \in [a,b]: \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

Beweis: setze $\varphi(t) = a + t(b-a) \qquad \varphi: [0,1] \to U$

$F(t) := f(\varphi(t)) \qquad , \qquad F: [0,1] \to \mathbb{R}$ diffbar

Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$: $\quad \exists\, \tau \in [0,1]: \quad F(1) - F(0) = \dot{F}(\tau)\cdot(1-0)$

d.h. $\quad f(b) - f(a) = f'(\underbrace{\varphi(\tau)}_{=:\xi})(b-a)$ $\quad\square$

Bem: $f: U \to \mathbb{R}^m$, $m > 1 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} Df_1(\xi_1)(b-a) \\ \vdots \\ Df_m(\xi_m)(b-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(\xi_1) \\ \vdots \\ Df_m(\xi_m) \end{pmatrix}(b-a)$$

, i.a. <u>nicht</u> $f(b) - f(a) = Df(\xi)($

<u>Satz 2:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar

$a, b \in U$, sodaß $[a,b] \subset U$

Sei $\qquad \| f'(x)(b-a) \| \leq M \|b-a\| \qquad \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow \qquad \| f(b) - f(a) \| \leq M \|b-a\|$

<u>Beweis:</u> sei $\varphi(t) := a + t(b-a)$, $\varphi : [0,1] \to U$

$F(t) = f(\varphi(t))$, $F : [0,1] \to \mathbb{R}^m$

i-te Komponente: $F_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar

$$F_i(1) - F_i(0) = \int_0^1 \dot{F}_i(t)\,dt \; , \qquad g_i(t) := \dot{F}_i(t) = f'(\varphi(t))(b-a)$$

$$\underset{\textstyle f_i(b) - f_i(a)}{\underbrace{F_i(1) - F_i(0)}}$$

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \int_0^1 g_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^1 g_m(t)\,dt \end{pmatrix} =: \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$\Big\| \sum_{j=0}^{n} g(\tau_j)(t_{j+1} - t_j) \Big\| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=0}^{n} \| g(\tau_j) \| \cdot (t_{j+1} - t_j)$$

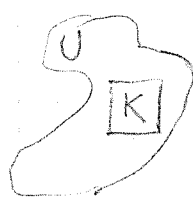
(Riemann-Summen) $\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$$\Big\| \int_0^1 g(t)\,dt \Big\| \qquad\qquad \int_0^1 \|g(t)\|\,dt$$

also: $\quad \| f(b) - f(a) \| = \| \int_0^1 g(t)\,dt \| \leq \int_0^1 \|g(t)\|\,dt$

$$= \int_0^1 \| f'(\varphi(t))(b-a) \|\,dt \leq M \|b-a\| \underbrace{\int_0^1 dt}_{1}$$

<u>Satz 3:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar



$K \subset U$ kompakt und konvex

$\Longrightarrow$ f ist auf K Lipschitz-stetig, d.h.,

$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a, b \in K : \quad \| f(b) - f(a) \| \leq M \|b-a\|$

Beweis: Sei $S = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \}$ kompakt
K kompakt
$\Big\} K \times S$ kompakt

$F : K \times S \to \mathbb{R} : (x,v) \mapsto \|f'(x)v\|$ stetig

F nimmt Maximum an, ist insbes. beschränkt:

$$\|f'(x)v\| \leq M \qquad \forall x \in K \quad \forall v \in S, \|v\| = 1$$

somit $\|f'(x)(b-a)\| \leq M \|b-a\| \qquad \forall x \in K \quad \forall a,b \in K$

S.2: $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b-a\|$ □

als Vorbereitung benötigen

5 Banach' Fixpunktsatz

wichtiges Hilfsmittel, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen nachzuweisen

Frage: Wann hat Fixpunktgleichung

$$x = \phi(x) \qquad (\phi : A \to A, \quad A \subset \mathbb{R}^n)$$

genau eine Lösung?

Bsp: $n = 1 \qquad \phi(x) = ax + b$ affin, Gl. $x = ax + b$

hinreichende Bed. $|a| < 1$: $\quad x = \frac{b}{1-a}$

kann die Lösung hier auch durch Fixpunktiteration erhalten:

Startwert $\quad x_0 = b$

Iteration $\quad x_{k+1} = a x_k + b$

$$x_1 = ab + b = (1+a)b$$
$$x_2 = a(1+a)b + b = (1+a+a^2)b$$
$$\vdots$$
$$x_k = (1 + a + \dots + a^k) b$$

$$x_k \to \sum_{j=0}^{\infty} a^j b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geom. Reihe}}}{=} \frac{1}{1-a} b$$

Erweiterung dieser Idee mit folgendem Konzept:

Def: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $\phi : A \to A$

ϕ heißt Kontraktion, falls es ein $\alpha < 1$ gibt, sodaß

$$\forall x, y \in A : \quad \| \phi(x) - \phi(y) \| \leq \alpha \| x - y \|$$

Satz: (Banach' Fixpunktsatz, 1928?) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $\phi : A \to A$ Kontraktion

$\Rightarrow$ ϕ hat genau einen Fixpunkt ($x^* \in A$ mit $\phi(x^*) = x^*$).

Für jeden Startwert $x_0 \in A$ konvergiert die durch $x_{k+1} = \phi(x_k)$ $(k \geq 0)$ rekursiv definierte Folge gegen den Fixpunkt.

Beweis: $\| x_2 - x_1 \| = \| \phi(x_1) - \phi(x_0) \| \leq \alpha \| x_1 - x_0 \|$

Induktion: $\| x_{k+1} - x_k \| \leq \alpha^k \| x_1 - x_0 \|$

$$\begin{aligned} \| x_{k+l} - x_k \| &\leq \| x_{k+l} - x_{k+l-1} \| + \dots + \| x_{k+1} - x_k \| \\ &\leq (\alpha^{k+l-1} + \dots + \alpha^k) \| x_1 - x_0 \| \\ &\leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{somit } (x_k) \text{ Cauchy-Folge, also konvergent} \\ A \text{ abg} \end{array}\right\rangle \quad x^* := \lim_{k \to \infty} x_k \in A$$

$$\begin{array}{ccc} x_{k+1} & = & \phi(x_k) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ da } \phi \text{ stetig} \\ x^* & & \phi(x^*) \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(x^*) = x^*$$

wäre y^* weiterer Fixpunkt, dann

$$\| x^* - y^* \| = \| \phi(x^*) - \phi(y^*) \| \leq \alpha \| x^* - y^* \|$$

$$\Rightarrow (1-\alpha) \| x^* - y^* \| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \| x^* - y^* \| = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = y^*$$

$\square$

Bsp: (linearer Fall) Gl. $x = Ax + b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n$

Annahme: $\|A\| := \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha < 1$

heißt Operatornorm von A

Startwert $x_0 = b$

Iteration $x_{k+1} = Ax_k + b \qquad (k \geq 0)$

erhalte $x_k = (I + A + \dots + A^k)\, b$, konv. nach Satz:

$$x^* = (I-A)^{-1} b = \sum_{j=0}^{\infty} A^j b$$

Neumann'Reihe (C. Neumann ~ 1870)

Es gilt (Ü): $A \mapsto \|A\|$ ist Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$

für $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ mit $p = 1, 2, \infty$ gilt

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$ max. Spaltenbetragssumme

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$ max. Zeilenbetragssumme

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

(tatsächlich gilt: $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter Eigenwert von } A^T A}$)

6 Satz von der lokalen Umkehrbarkeit

Satz 1: (inverse function theorem)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar

$x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$, $Df(x_0)$ invertierbar

$\Longrightarrow$

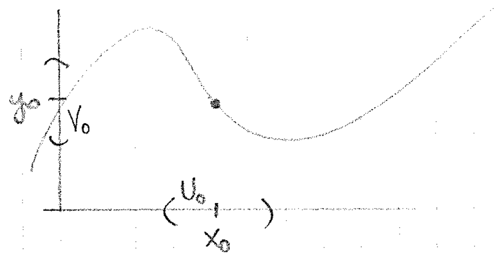
1) Es gibt offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0, sodaß

$$f : U_0 \to V_0 \quad \text{bijektiv}$$

2) Die Umkehrabb. $g = f^{-1} : V_0 \to U_0$ ist stetig diffbar und

$$Dg(y) = \left(Df(x)\right)^{-1} \quad \text{für} \quad x = g(y) \quad \text{bzw } y = f(x)$$

Bild: $(n=1)$



Vorbemerkung: $y^* \in \mathbb{R}^n$ nahe y_0 geg.,

suche x nahe x_0 mit $f(x) = y^*$

schreibe $x = x_0 + e$ $\qquad f(x_0 + e) = y^*$

$$f(x_0) + Df(x_0)\, e + \underbrace{r(x_0+e)}_{\to 0 \text{ für } \|e\| \to 0} \|e\|$$

vernachlässigen

Approximation Δx_0 für e:

$$e \approx \Delta x_0 = -Df(x_0)^{-1}\left(f(x_0) - y^*\right)$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 \qquad \text{"bessere" Approximation an } x$$

iteriere
$$\left.\begin{aligned} \Delta x_k &= -Df(x_k)^{-1}\left(f(x_k) - y^*\right) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \end{aligned}\right\}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

Newton-Verfahren zur näherungsweisen Lösung von $f(x) - y^* = 0$

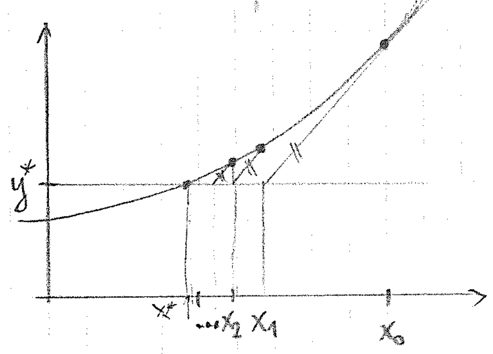
Vereinfachung : nehme $Df(x_0)^{-1}$ statt $Df(x_k)^{-1}$ (dessen Existenz nicht gesichert ist!)

erhalte Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \text{mit} \quad \phi(x) = x - Df(x_0)^{-1}\left(f(x) - y^*\right)$$

Idee : wende darauf Banach' Fixpunktsatz an

Bild :
($n=1$)



<u>Beweis des Satzes:</u>

(a) Sei $y^* \in \mathbb{R}^n$ geg.,

zeigen: falls $\|y^* - y_0\|$ genügend klein, gibt es ein $\rho > 0$, sodaß VS des Banach' Fixpunktsatzes erfüllt für $\phi : \overline{B_\rho}(x_0) \to \overline{B_\rho}(x_0)$

$$\|\phi(x) - x_0\| = \|x - x_0 - Df(x_0)^{-1}\left(f(x) - f(x_0) + y_0 - y^*\right)\| \overset{?}{\leq} \rho$$

$$x - x_0 - Df(x_0)^{-1}\left(f(x) - f(x_0)\right) =$$
$$= -Df(x_0)^{-1}\left(f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\right)$$
$$= -Df(x_0)^{-1}\, r(x)\, \|x - x_0\| \quad \text{mit} \quad r(x) \to 0 \quad \text{für } x \to x_0$$

somit $\exists \delta > 0 \quad \forall x,\ \|x - x_0\| \leq \delta : \quad \|Df(x_0)^{-1} r(x)\| \leq \frac{1}{2}$

für $\rho \leq \delta$ und y so nahe an y_0, daß $\|Df(x_0)^{-1}(y - y_0)\| \leq \frac{\rho}{2}$, (*)

erhalte für x mit $\|x - x_0\| \leq \rho$: $\quad \|\phi(x) - x_0\| \leq \frac{1}{2}\rho + \frac{\rho}{2} = \rho$

also $\quad \phi : \overline{B_\rho}(x_0) \to \overline{B_\rho}(x_0)$

zeigen: ϕ Kontraktion auf $\overline{B_\rho}(x_0)$ Seien $x, \tilde{x} \in \overline{B_\rho}(x_0)$

$$\phi(\tilde{x}) - \phi(x) = \tilde{x} - x - Df(x_0)^{-1}\left(f(\tilde{x}) - f(x)\right)$$
$$= - Df(x_0)^{-1}\left(f(\tilde{x}) - f(x) - Df(x_0)(\tilde{x}-x)\right)$$
$$= - Df(x_0)^{-1}\left(\int_0^1 Df(x+t(\tilde{x}-x))\cdot(\tilde{x}-x)\,dt - Df(x_0)(x-\tilde{x})\right)$$
$$= - Df(x_0)^{-1}\left(\int_0^1 \left(Df(x+t(\tilde{x}-x)) - Df(x_0)\right)(\tilde{x}-x)\,dt\right)$$

da Df stetig nach VS:

$\exists\, \tilde{\delta} > 0 \quad \forall \xi, \|\xi - x_0\| \le \tilde{\delta}: \quad \|Df(x_0)^{-1}\left(Df(\xi) - Df(x_0)\right)\| \le \frac{1}{2}$ $(**)$

falls $\rho \le \tilde{\delta}$: $\|x + t(\tilde{x}-x) - x_0\| = \|(1-t)(x-x_0) + t(\tilde{x}-x_0)\|$

$$\le (1-t)\rho + t\rho \le \rho \le \tilde{\delta}$$

und daher

$$\|\phi(\tilde{x}) - \phi(x)\| \le \int_0^1 \|Df(x_0)^{-1}\left(Df(x+t(\tilde{x}-x)) - Df(x_0)\right)\|\cdot\|\tilde{x}-x\|\,d$$
$$\le \int_0^1 \frac{1}{2}\|x-\tilde{x}\|\,dt = \frac{1}{2}\|x-\tilde{x}\|$$

somit: für $\rho \le \min(\delta, \tilde{\delta})$ ist

$$\phi : \overline{B_\rho}(x_0) \to \overline{B_\rho}(x_0) \quad \text{Kontraktion}$$

(B) nach Banach' Fixpunktsatz: ϕ hat genau 1 Fixpunkt $x^* \in \overline{B_\rho}($

$$x^* = \phi(x^*) = x^* - Df(x_0)^{-1}\left(f(x^*) - y^*\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x^*) = y^*$$

Sei $V_0 := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|Df(x_0)^{-1}(y-y_0)\| < \frac{\rho}{2} \right\}$,

ist offene Umgebung von y_0

gezeigt: $\forall y \in \overline{V_0} \quad \exists_1 x \in \overline{B_\rho}(x_0) : f(x) = y$ $\qquad x := g(y)$

$g : \overline{V_0} \to \overline{B_\rho}(x_0) \qquad U_0 := g(V_0) = f^{-1}(V_0)$ offene Umgebung von x_0

(da f stetig, s. Kap. II, 63)

erhalte $f : U_0 \to V_0$ bijektiv , Umkehrfunktion $f^{-1} = g : V_0 \to U_0$

(c) <u>falls</u> g diffbar :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ g\circ f = id}}{I =} D(g\circ f)(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} Dg(y)\, Df(x) \quad \text{für } y = f(x)$$

bzw. $x = g(y)$

<u>falls</u> $Df(x)$ invertierbar :

$$Dg(y) = Df(x)^{-1}$$

(d) zeigen : $Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U_0 \subset \overline{B}_\delta(x_0)$

bzw. äquivalent $Df(x_0)^{-1} Df(x)$ inv. –"–

wissen aus (**) : $\| \underbrace{Df(x_0)^{-1} Df(x) - I}_{=: A(x)} \| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \overline{B}_\delta(x_0)$

wissen aus §5 : $I - A(x)$ invertierbar

$$(I - A(x))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A(x)^j \quad , \quad \| I - A(x) \|^{-1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A(x)^j\|$$

haben $I - A(x) = Df(x_0)^{-1} Df(x)$ $\qquad \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2$

$\Rightarrow$ $Df(x)$ inv. ,

$$\| Df(x)^{-1} \| = \| \left(Df(x_0)\,(I - A(x)) \right)^{-1} \| = \| (I - A(x))^{-1} Df(x_0)^{-1} \|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\| \ (\text{Ü})}}{\leq} \| (I - A(x))^{-1} \| \cdot \| Df(x_0)^{-1} \| \leq 2\, \| Df(x_0)^{-1} \|$$

(e) zeigen: g diffbar in jedem $y^* \in V_0$. Sei $y \in V_0$, $x^* = g(y^*)$, $x = g(y)$

haben f diffbar: $f(x) = f(x^*) + Df(x^*)\,(x-x^*) + \underbrace{r(x)}_{\to 0}\,\|x-x^*\|$ für $x \to x^*$

$$g(y) - g(y^*) - Df(x^*)^{-1}(y-y^*) =$$

$$= x - x^* - Df(x^*)^{-1}\big(f(x)-f(x^*)\big) = \underbrace{Df(x^*)^{-1} r(x)}_{\to 0 \quad x \to x^*}\,\|x-x^*\|$$

$x^* = \phi(x^*)$

$x = \phi(x) + (y-y^*)$

$$\|x-x^*\| \le \underbrace{\|\phi(x)-\phi(x^*)\|}_{\le \frac{1}{2}\|x-x^*\|} + \|y-y^*\|$$

$\Rightarrow \|x-x^*\| \le 2\|y-y^*\|$

somit g in y^* diffbar

(f) schließlich noch: g stetig diffbar. Seien $y, y^* \in V_0$, $x = g(y)$, $x^* = g(y^*)$

$$Dg(y) - Dg(y^*) = Df(x)^{-1} - Df(x^*)^{-1}$$

$$= -Df(x^*)^{-1}\Big(Df(x) - Df(x^*)\Big)Df(x)^{-1} \qquad \left(\text{vgl. } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\right)$$

also
$$\|Dg(y) - Dg(y^*)\| \le \underbrace{\underbrace{\|Df(x^*)^{-1}\|}_{\le M} \cdot \underbrace{\|Df(x)-Df(x^*)\|}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } x \to x^* \\ \text{nach VS}}} \cdot \underbrace{\|Df(x)^{-1}\|}_{\le M}}_{\to 0}$$

$(M = 2\,\|Df(x_0)^{-1}\|)$

somit Dg stetig in y^* $\square$

zeigen als Folgerung von S.1:

<u>Satz 2:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar

$Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U$

$\Rightarrow$ 1) $f(U)$ ist offen

2) Falls $f: U \to f(U)$ bijektiv, ist auch f^{-1} stetig diffbar

<u>Bem:</u> Eine bijektive Abb. $f: U \to V$ mit f, f^{-1} stetig diffbar heißt <u>Diffeomorphismus</u>

<u>Beweis:</u> Sei $y_0 \in f(U)$ $\quad \exists x_0 \in U : y_0 = f(x_0)$

nach S.1 $\exists$ offene Umgebungen U_0, V_0 von x_0, y_0, sodaß

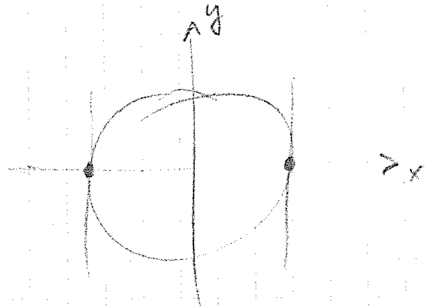
$f: U_0 \to V_0$ bijektiv , $f^{-1}: V_0 \to U_0$ stetig diffbar

$V_0 \subset f(U) \Rightarrow f(U)$ Umgebung von $y_0 \underset{\forall y_0}{\Rightarrow} f(U)$ offen

f^{-1} in Umgebung von y_0 stetig diffbar $\underset{\forall y_0}{\Rightarrow} f^{-1}: f(U) \to U$ st. diffb.

$\square$

<u>7 Satz über implizite Funktionen</u>



<u>Bsp:</u> $y = \sqrt{1-x^2}$ explizit

$f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ implizit

Sei (x_0, y_0) mit $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$

Gleichung in Umgebung von (x_0,y_0) eindeutig nach y auflösbar,
falls $(x_0,y_0) \neq (1,0)$ und $(x_0,y_0) \neq (-1,0)$.

In diesen beiden Punkten ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ gleich 0,

in allen anderen $\neq 0$, also invertierbar.

<u>Bez:</u> $\underset{\Psi}{W} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen

bez. (x,y) $\quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

$f: W \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar

$$Df(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,y), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x,y)}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_1}(x,y), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(x,y)} \Big)$$

$$= \Big(\underset{\underset{\mathbb{R}^{m\times n}}{\cap}}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} , \underset{\underset{\mathbb{R}^{m\times m}}{\cap}}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} \Big)$$

Satz 1: (Implicit function theorem)

Sei $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f: W \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar, $(x_0, y_0) \in W$ so, daß

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ invertierbar}$$

$\Longrightarrow$ Es gibt offene Umgebungen U_0 von x_0, V_0 von y_0 und eine Funktion $g: U_0 \to V_0$, sodaß für alle $(x,y) \in U_0 \times V_0$ gilt:

$$\underline{f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x).}$$

$g: U_0 \to V_0$ ist stetig diffbar, und

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{mit } y = g(x)$$

Sprechweise: Gleichung $f(x,y) = 0$ läßt sich lokal eindeutig nach y auflösen.

Bem: affiner Fall $\quad f(x,y) = Ax + By - c \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times m}, c \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B$$

falls B invertierbar:

$$Ax + By - c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -B^{-1}Ax + B^{-1}c =: g(x)$$

$$Dg = -B^{-1}A = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Bem: <u>falls</u> g stetig diffbar existiert, folgt aus

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \forall x \in U_0$$

mit Kettenregel ("implizite Differentiation"):

$$0 = Df(x, g(x)) \, D\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} I \\ Dg(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Dg \,,$$

also $\quad Dg(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right)$

<u>Beweis:</u> Idee: wende Satz über lokale Umkehrbarkeit an auf

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \qquad F : \underset{\mathbb{R}^{n+m}}{\overset{}{W \atop \cap}} \to \mathbb{R}^{n+m}$$

klar: F stetig diffbar, $F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$DF(x,y) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c:c} I_n & 0 \\ \hdashline \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}\right] & \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad n \quad & \quad m \quad \end{array} & \end{array}$$

beachte: $DF(x,y)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ invertierbar

dann ist $$\big(DF(x,y)\big)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

wissen aus S.1, §6: $\exists$ offene Umgebungen W_0 von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, Q_0 von $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sodaß $F : W_0 \to Q_0$ bijektiv

Umkehrabb. $G : Q_0 \to W_0$ ist stetig diffbar und

$$DG(x,z) = \Big(DF\big(G(x,z)\big)\Big)^{-1}$$

schreibe $G(x,z) = \begin{pmatrix} G_1(x,z) \\ G_2(x,z) \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$

$F \circ G = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} G_1(x,z) \\ f\big(G_1(x,z), G_2(x,z)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} G_1(x,z) = x \\ f(x, G_2(x,z)) = z \end{matrix}$

insbes. erfüllt $g(x) := G_2(x,0)$: $\qquad f(x, g(x)) = 0$

Eindeutigkeit von g: Sei $f(x,y)=0$ für ein $\binom{x}{y} \in W_0$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G(x,0) \quad \Rightarrow \quad y = G_2(x,0)$$

wegen Stetigkeit von G finde Umgebungen U_0 von x_0, V_0 von y_0 so, daß $U_0 \times \{0\} \subset Q_0$, $U_0 \times V_0 \subset W_0$ und

$$G : U_0 \times \{0\} \longrightarrow U_0 \times V_0 \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$$

damit $g : U_0 \to V_0$ und $(x, g(x)) \in W_0 \quad \forall x \in U_0$

g stetig diffbar, da G_2 stetig diffbar

$$Dg(x) = \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,0)$$

wegen $DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ und $DG(x,0) = DF(x,g(x))^{-1}$

erhalte aus obiger Formel für $DF(x,y)^{-1}$:

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x)) \qquad \square$$

8 Höhere partielle Ableitungen

betrachten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y)$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial x}"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial y}"'] & \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial x}"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial y}"] & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} \arrow[r, "\frac{\partial}{\partial x}"] \arrow[d, "\frac{\partial}{\partial y}"'] & \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f & \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & &
\end{tikzcd}$$

(von Euler, Cauchy als allgemein gültig angesehen)

Satz 1: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, daß in Umgebung von (x_0, y_0) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ existieren und stetig sind

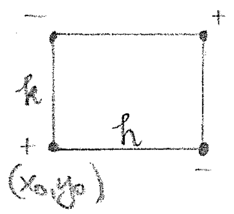
$\Longrightarrow$ Es existiert auch $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Bem: auf Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ kann nicht verzichtet werden

Gegenbsp von Peano 1884 (Ü): $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$

Beweis von S.1:



betrachte Differenzenquotient

$$d(h,k) := \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)}{k} - \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h} - \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{hk}\left(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0)\right)$$

nach MWS von Lagrange für $g(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}$:

$\exists\ \xi$ zwischen x_0 und x_0+h : $\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(\xi)$

d.h.
$$d(h,k) = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right)$$

nach MWS für $\frac{\partial f}{\partial x}$:

(*) $$d(h,k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)$$ für ein ξ zw. x_0 und x_0+h, η zw. y_0 und y_0+k

haben
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0} d(h,k)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0} d(h,k)\right),$$ falls Grenzwerte existieren

da nach VS $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig, folgt aus (*)

$$\lim_{k\to 0} d(h,k) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0} d(h,k)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$\Longrightarrow$ Beh. $\square$

Bem: Sei allgemeiner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ so, daß $\partial_i f, \partial_j f, \partial_j\partial_i f$ in Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren und stetig sind.
Dann existiert auch $\partial_i\partial_j f(x_0)$, und $\partial_i\partial_j f(x_0) = \partial_j\partial_i f(x_0)$.

(folgt unmittelbar aus vorigem Satz: halte alle x_ℓ außer x_i, x_j fest)

9 Taylor-Reihen

Erinnerung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diffbar in Umgebung von x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0) h^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + R_{k+1}$$

mit Restterm $R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi) h^{k+1}$, $\xi \in [x_0, x_0+h]$

bzw. $R_{k+1} = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(x_0+th)\, dt \cdot h^{k+1}$

betrachten jetzt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genügend oft partiell diffbar in Umgebung von $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + ???$$

Idee (Cauchy): verwende 1-dim. Taylor-Reihe von

$$g(t) := f(x_0+th, y_0+tk)$$

haben mit Kettenregel

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th, y_0+tk)\, k$$

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\%)\, h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\%)\, kh + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\%)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\%)\, k^2$$

($\%$ für x_0+th, y_0+tk)

usw.

habe

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{6} g'''(\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

d.h.,

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, k + \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\, k^2 \right) \\ & + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,\eta)\, h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi,\eta)\, h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi,\eta)\, hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,\eta)\, k^3 \right) \end{aligned}$$

mit $\xi = x_0 + \theta h$, $\eta = y_0 + \theta k$

erweitern dies auf $\underline{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$

$f(x_0 + h) = ?$ $\quad (x_0 \in \mathbb{R}^n,\ h \in \mathbb{R}^n)$

verwende Taylor-Reihe für $g(t) = f_i(x_0 + th)$, erhalte

$$f_i(x_0+h) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\, h_j + \frac{1}{2!}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\, h_j h_k$$

$$+ \frac{1}{3!}\sum_j \sum_k \sum_e \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_e}(x_0)\, h_j h_k h_e + R_{4,i}$$

bzw.

$$f_i(x_0+h) = f_i(x_0) + \sum_{q=1}^k \frac{1}{q!} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_q=1}^n \frac{\partial^q f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_q}}(x_0)\, h_{j_1} \dots h_{j_q}$$
$$+ R_{k+1,i}$$

einfachere Notation hilfreich!

haben schon $f'(x_0)h = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\, h_j \right)_{i=1}^m$, $\quad f'(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear

definieren $\underline{\text{2. Ableitung}}$ von f an der Stelle x_0 als die $\underline{\text{bilineare Abbildung}}$ $f''(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$f''(x_0)(u,v) = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\, u_j v_k \right)_{i=1}^m$$

beachte: habe oben $f''(x_0)(h,h)$

allgemein:

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>k-mal stetig diffbar</u>, falls in jedem $x \in U$ alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind

$C^k(U, \mathbb{R}^m) := \{ f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ k-mal stetig diffbar} \}$

für $m=1$ schreibe kürzer $C^k(U) = C^k(U, \mathbb{R})$

Die <u>k-te Ableitung</u> von $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ in $x_0 \in U$ ist die multilineare Abbildung $f^{(k)}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}^m$

geg. durch

$$f^{(k)}(x_0)(v_1, \ldots, v_k) = \left(\sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x_0) v_{1,j_1} \cdots v_{k,j_k} \right)_{i=1,\ldots,m}$$

erhalte damit

<u>Satz</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ so, daß Verbindungsstrecke $[x_0, x_0+h]$ in U liegt

$$\Longrightarrow \quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)(h,h) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(h,h,h)$$

$$\ldots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h, \ldots, h) + R_{k+1}(x_0, h)$$

mit Restterm $R_{k+1}(x_0, h) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k f^{(k+1)}(x_0+th)(h, \ldots, h)\, dt$

<u>Beweis</u>: aus Taylor-Formel mit Integralrestterm für $g(t) = f_i(x_0+th)$ und obigen Definition □

brauche oft Abschätzung des Restterms:

<u>HS</u>: $\| R_{k+1}(x_0, h) \|_\infty \leq \frac{M}{(k+1)!} \| h \|_\infty^{k+1}$

mit $M = \max_{t \in [0,1]} \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_{k+1}=1}^{n} \left| \frac{\partial^{k+1} f_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{k+1}}}(x_0+th) \right|$

<u>Beweis</u>: $\left\| \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \varphi(t)\, dt \right\| \leq \frac{1}{k!} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^k dt}_{\frac{1}{k+1}} \max_{t \in [0,1]} \|\varphi(t)\|\, dt$

Def. von $f^{(k+1)}$ und Dreiecksungl. □

10 Differentiation von Integralen mit Parameter

<u>Satz:</u> Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig,

$$F(p) := \int_c^d f(p,x)\,dx \quad , \quad p \in [a,b]$$

Falls $\frac{\partial f}{\partial p}$ existiert und stetig ist, so ist F stetig diffbar und

$$F'(p) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\,dx \quad .$$

<u>Beweis:</u>

$$\frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \int_c^d \frac{f(p+h,x) - f(p,x)}{h}\,dx$$

$$= \int_c^d \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(p+th,x)\,dt\,dx$$

$$\lim_{h\to 0} \int_c^d \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(p+th,x)\,dt}_{\substack{\text{stetige Funktion von } (h,x) \\ \text{nach Kap. II, §5}}}\,dx \underset{\text{II, §5}}{=} \int_c^d \lim_{h\to 0} \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(p+th,x)\,dt}_{\text{stetige Funktion von } (h}\,dx$$

$$\underset{\text{II, §5}}{=} \int_c^d \int_0^1 \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial p}(p+th,x)\,dt\,dx$$

$$\underset{\frac{\partial f}{\partial p}\text{ stetig}}{=} \int_c^d \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\,dt\,dx = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\,dx$$

$\Rightarrow$ F diffbar und obige Formel für $F'(p)$

$p \mapsto \int_c^d \frac{\partial f}{\partial p}(p,x)\,dx$ stetig nach II, §5 $\square$