I. Folgen im $\mathbb{R}^n$ (Topologie im $\mathbb{R}^n$)

Erinnerung: Folgen in $\mathbb{R}$ $\quad (a_k) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, $a_k \in \mathbb{R}$

Konvergenz, Cauchy-Folgen, Satz von Bolzano-Weierstraß, ...

$$\hookrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \;\; \forall k \geq K : \quad \underbrace{|a_k - a|}_{\text{Abstand zw. } a_k \text{ und } a} < \varepsilon$$

jetzt: $\quad \mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

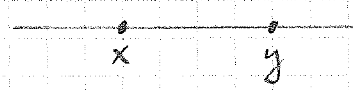
ist $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

brauche Begriff für Abstand von Punkten in $\mathbb{R}^n$:

1 Normen auf dem $\mathbb{R}^n$

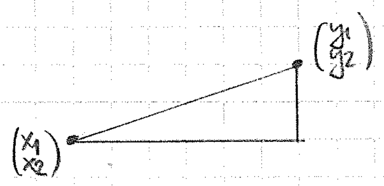
$n = 1$:



Abstand $d(x,y) = |x - y|$

Betrag

$n = 2$:



euklid' Abstand $\quad d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

euklid' Abstand zweier Punkte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \| x - y \|_2 \quad \text{mit}$$

$$\| v \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$$

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>euklid' Metrik</u>,

$\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>euklid' Norm</u> auf $\mathbb{R}^n$.

$\|\cdot\|_2$ hat folgende Eigenschaften, die von der Betragsfunktion $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ her wohlbekannt sind:

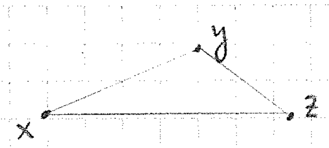
<u>Def</u>: Eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>Norm auf $\mathbb{R}^n$</u>, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(N1) $\quad \|x\| \geq 0 \quad$ und $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(N3) $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad$ (Dreiecks-Ungl.)

<u>Bem</u>: $\mathbb{R}^2$



$$d(x,z) = \|x-z\|_2 = \|(x-y)+(y-z)\|_2$$
$$\underset{\text{Dreiecks-Ungl}}{\leq} \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 = d(x,y) + d(y,z)$$

$\to$ Name!

wichtige <u>Beispiele</u> für Normen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \qquad \text{euklid' Norm}$$

(N1), (N2) klar

(N3) aus Minkowski' Ungl. mit $p = 2$ oder aus folgendem Satz für euklid' Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

<u>Satz 1</u>: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis: (N1) klar, da Skalarprodukt pos. def. Bilinearform

(N2) ✓

(N3) folgt aus

Cauchy-Schwarz' Ungl.: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

mittels
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Beweis der C-S Ungl:

$$0 \leq \langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

wähle $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\langle x,x\rangle}{\langle y,y\rangle}} = \pm\frac{\|x\|}{\|y\|}$ (falls $y=0$, nichts zu zeigen)

erhalte $0 \leq 2\langle x,x\rangle \mp 2\frac{\|x\|}{\|y\|}\langle x,y\rangle$

$\Rightarrow \quad \pm\langle x,y\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|$ □

wichtige Normen, die nicht von einem Skalarprodukt erzeugt werden

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \qquad \text{Summennorm}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \qquad \text{Maximumnorm}$$

in beiden Fällen (N1), (N2) klar, (N3) aus Δ-Ungl. für $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{für } p \geq 1 \qquad (p\text{-Norm})$$

(N1), (N2) klar, (N3) Minkowski' Ungl: $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

<u>HS</u>: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Beweis: 1., 3. Ungl. ✓

2. Ungl.:
$$\|x\|_1^2 = \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\Big)^2 = \sum_j |x_j|^2 + 2\sum_{j<k} |x_j|\cdot|x_k|$$
$$\geq \sum_j |x_j|^2 = \|x\|_2^2 \qquad \square$$

<u>Bem</u> (Ü) $\quad p \mapsto \|x\|_p$ ist monoton fallend auf $[1,\infty)$ (für jedes $x \in \mathbb{R}^n$)

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$$

Alle p-Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind also zueinander äquivalent in folgendem Sinn:

<u>Def</u>: Zwei Normen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ heißen <u>äquivalent</u>, falls es positive Konstanten c, C gibt, sodaß für alle x

$$c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq C\|x\|_\alpha \quad .$$

zeigen später (Kap. V): Je zwei <u>beliebige</u> Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zueinander äquivalent.

2 Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$

betrachte Folge $(x_k) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ von Vektoren $x_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Def: Die Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad \forall k \geq K : \quad \| x_k - a \| < \varepsilon \quad .$$

schreiben dann: $\lim_{k \to \infty} x_k = a$ oder $x_k \to a$ für $k \to \infty$.

Bem: selbe Def. wie in $\mathbb{R}$, jetzt $\|\cdot\|$ statt $|\cdot|$.
Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ hängt zunächst von der gewählten Norm ab
aber: falls $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\beta$, so gilt

$$\begin{aligned} & (x_k) \text{ konvergiert bzgl. } \|\cdot\|_\alpha \\ \iff & \qquad -\text{''}- \qquad \|\cdot\|_\beta \end{aligned}$$

zeigen später: alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent
nehmen einstweilen immer euklid' Norm oder dazu bekanntermaßen äquivalente Norm $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Satz 1: $\lim_{k \to \infty} x_k = a \iff \lim_{k \to \infty} x_{k,j} = a_j$ für $j = 1, \dots, n$

also: Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz

Beweis: $\| x_k - a \|_\infty < \varepsilon \iff | x_{kj} - a_j | < \varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$

Def: Die Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad \forall k \geq K \quad \forall \ell \geq 1 : \quad \| x_k - x_{k+\ell} \| < \varepsilon$$

<u>Satz 2</u>: (Cauchy' Konvergenzkriterium in $\mathbb{R}^n$)
Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

<u>Beweis:</u> (x_k) Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$)

$\iff$ (x_{kj}) —"— in $\mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, n$

$\underset{\text{C.K.K.}}{\iff}$ (x_{kj}) konvergiert in $\mathbb{R}$ —"—

$\underset{\text{S.1}}{\iff}$ (x_k) —"— in $\mathbb{R}^n$ □

<u>Def</u>: Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ heißt <u>beschränkt</u>, falls

$$\exists M > 0 \quad \forall k \geq 1 : \quad \|x_k\| \leq M .$$

<u>Satz 3</u>: (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^n$)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge

<u>Beweis:</u> (x_{k1}) hat nach B-W in $\mathbb{R}$ konv. Teilfolge $(x_{\sigma_1(k),1})$
(mit $\sigma_1(1) \leq \sigma_1(2) \leq \dots$)

$(x_{\sigma_1(k),2})$ —"— $(x_{\sigma_2(k),2})$

$\vdots$

$(x_{\sigma_{n-1}(k),n})$ —"— $(x_{\sigma(k),n})$

Die Teilfolge $(x_{\sigma(k)})$ von (x_k) konvergiert in allen k Komp., daher nach S.1 konv. in $\mathbb{R}^n$. □

3 Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen

Begriffe von Cantor 1884 (Begründer der Mengenlehre) und
Hausdorff 1914 (— → Topologie)

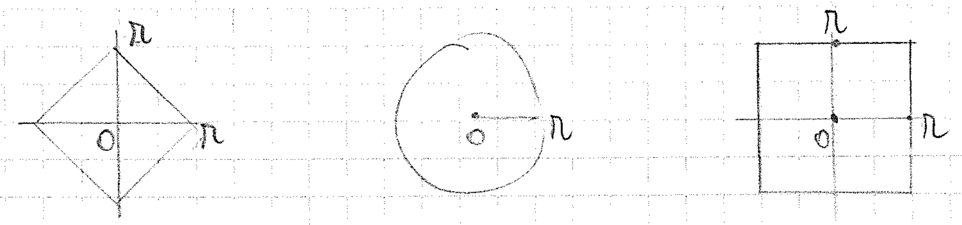
in $\mathbb{R}$: offene Intervalle (a,b) bzw. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

abgeschlossene I. $[a,b]$

im $\mathbb{R}^n$: $B_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r \}$ (engl. ball)

offene Kugel vom Radius r um a bzgl. der Norm $\|\cdot\|$

Bild: $n=2$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ $p = 1, 2, \infty$



$p=1$ $p=2$ $p=\infty$

Def: Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung von a, f
$\exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset U$

Bem: Begriff der Umgebung unabhängig von der speziellen Wahl äquivalenter Normen

beachte: $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent $\|\cdot\|_\beta$ $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: ε-Kugel bzgl. $\|\cdot\|_\alpha$ enthält δ-Kugel bzgl. $\|\cdot\|_\beta$ u

Def: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

Bsp: $B_r(a)$ ist offen für bel. $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, denn:

sei $x \in B_r(a)$, $\delta := r - \|x\| > 0$

$\forall y \in B_\delta(x)$: $\|y\| \le \|y-x\| + \|x\| < \delta + \|x\| = r$ $\Rightarrow$ $B_\delta(x) \subset B_r(a)$

Def: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls für jede konvergente Folge in A auch der Grenzwert in A ist:

$$x_k \in A\,,\ (x_k) \text{ konvergent} \implies \lim_{k\to\infty} x_k \in A$$

Bsp: abg. Kugel $\overline{B_r}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\}$ ist abg., denn

Sei (x_k) konv. Folge mit $\|x_k - a\| \leq r$, $\quad x := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$

z.z: $\|x-a\| \leq r$

indirekt: wäre $\|x-a\| = r + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, so wäre

$$\|x_k - x\| \geq \|x-a\| - \|x_k - a\| \geq \varepsilon \qquad \forall k \geq 0$$

im Wspr. zu $x_k \to x$

Satz 1: A abg $\iff$ A^c offen $\qquad (A^c = \complement A = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$

Komplement von A

Beweis: $(\Rightarrow)$ A^c nicht offen $\Rightarrow$

$\exists\, a \in A^c$: A^c keine Umgebung von a

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(a) \not\subset A^c$

wähle $\varepsilon = \frac{1}{k} \qquad \exists\, x_k \in A : \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$

somit
$$\begin{array}{ccc} x_k & \longrightarrow & a \\ \cap & & \not\in \\ A & & A \end{array} \implies A \text{ nicht abg}$$

$(\Leftarrow)$ A^c offen $\Rightarrow \forall a \in A^c\ \exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset A^c$

d.h. $\forall x \in A : \|x-a\| \geq \delta$

$\Rightarrow \forall a \in A^c$: a nicht Grenzwert einer Folge in A

$\Rightarrow$ Jeder Grenzwert einer Folge in A liegt in A $\Rightarrow A$ abg.

<u>Satz 2:</u> Seien $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Familien von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit Indexmenge Λ

(a) Vereinigungen offener Mengen sind offen, d.h.,

$$\forall \lambda\in\Lambda: U_\lambda \text{ offen} \implies \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists \lambda\in\Lambda : x\in U_\lambda\} \text{ offen}$$

(b) Durchschnitte abg. Mengen sind abg., d.h.,

$$\forall \lambda\in\Lambda: A_\lambda \text{ abg} \implies \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \forall \lambda\in\Lambda : x\in A_\lambda\} \text{ abg.}$$

(c) Durchschnitte <u>endlich vieler</u> offener Mengen sind offen, d.h.,

$$U_1, \dots, U_m \text{ offen} \implies U_1\cap\dots\cap U_m \text{ offen}$$

(d) Vereinigungen <u>endlich vieler</u> abg. Mengen sind abg., d.h.,

$$A_1, \dots, A_m \text{ abg} \implies A_1\cup\dots\cup A_m \text{ abg.}$$

<u>Beweis:</u> (a) Sei $x\in U_\lambda$ für ein $\lambda\in\Lambda$ $\implies$ U_λ Umgebung von x

$\implies \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ — " —

somit $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ offen

(b) folgt aus (a) mittels Satz 1 und $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$

(c) Sei $x\in U_1\cap\dots\cap U_m$

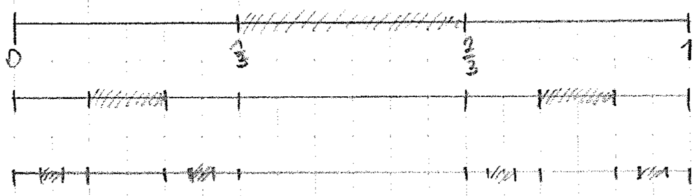
da U_k offen, $\exists\, \delta_k>0 : B_{\delta_k}(x)\subset U_k$

wähle $\delta = \min_{k=1,\dots,m} \delta_k > 0$, habe $B_\delta(x)\subset U_1\cap\dots\cap U_m$

somit $U_1\cap\dots\cap U_m$ offen

(d) aus (c) mit Satz 1 □

Bsp: Cantor-Menge



$\vdots$

entferne jeweils mittleres Drittel

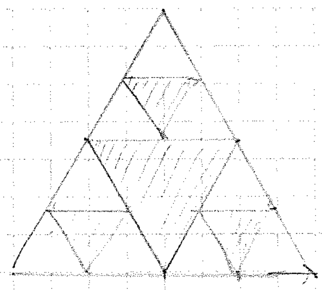
$$A = [0,1] \setminus \left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \cup \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \cup \dots \right)$$
$$= \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \;\middle|\; a_k \in \{0,2\} \right\}$$

$$A^c = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \cup \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \cup \dots$$

Vereinigung offener Intervalle

$\overset{(S.2)}{\Longrightarrow}$ A^c offen $\overset{(S.1)}{\Longrightarrow}$ A abg.

2-dim. Analogon: Dreieck von Sierpiński



Bem: (c) und (d) in S.2 i.a. nicht richtig für unendl. viele Mengen

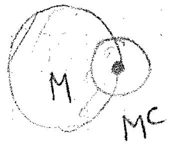
z.B. $$\bigcap_{k \geq 1} \underbrace{\left(-1-\tfrac{1}{k},\; 1+\tfrac{1}{k}\right)}_{\text{offen}} = \underbrace{[-1,1]}_{\text{abg.}}$$

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

$\partial M := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid$ jede Umgebung von x hat Punkte in M und in $M^c \}$
heißt Rand von M

$\mathring{M} := M \setminus \partial M$ heißt Inneres von M

$\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt Abschluß von M



<u>Bsp:</u> $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$

$\mathring{B}_r(a) = B_r(a) = \{ \qquad < \quad \}$

$\overline{B_r(a)} = \bar{B}_r(a) = \{ \qquad \leq \quad \}$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

A Cantor-Menge: $\partial A = A$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\bar{A} = A$

<u>Satz 3:</u> Für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) $\mathring{M}$ ist offen. Ist $U \subset M$ offen, so ist $U \subset \mathring{M}$.

(b) $\overline{M}$ ist abg. Ist $A \supset M$ abg., so ist $A \supset \overline{M}$.

(c) ∂M ist abg., $\partial M = \partial(M^c)$.

<u>Beweis:</u> (a) $a \in \mathring{M} \underset{\text{Def}}{\Longrightarrow} a \in M,\ a \notin \partial M$

$\Longrightarrow$ a hat offene Umgebung $V \subset M$

jeder Punkt von V hat $V \subset M$ als Umgebung $\Rightarrow V \cap \partial M = \emptyset$

also $V \subset \mathring{M} \Rightarrow \mathring{M}$ Umgebung von a

somit $\mathring{M}$ offen

$U \subset M$ offen $\Longrightarrow U \cap \partial M = \emptyset$ wie oben für V

also $U \subset \mathring{M}$

(b) nach (a) ist $(M^c)^\circ = M^c \setminus \partial M^c$ offen

$\Longrightarrow (M^c \setminus \partial M^c)^c = M \cup \partial M^c = M \cup \partial M = \overline{M}$ abg.

($\partial M = \partial M^c$ klar aus De

Sei $A \supset M$ abg $\Rightarrow A^c \subset M^c$ offen

$\underset{(a)}{\Longrightarrow} A^c \subset (M^c)^\circ \Longrightarrow A \supset ((M^c)^\circ)^c \underset{\text{s.o.}}{=} \overline{M}$

(c) $\partial M = \underbrace{(M \cup \partial M)}_{\text{abg}} \cap \underbrace{(M^c \cup \partial M^c)}_{\text{abg}}$ abg. $\square$

4 Kompakte Mengen

Begriff von Fréchet (1906): Mengen, in denen Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß gilt

Def: Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls jede Folge in K eine Teilfolge hat, die gegen einen Punkt von K konvergiert.

Satz 1: Für $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt

K kompakt $\Longleftrightarrow$ K abg, beschränkt

(d.h. $\exists B \geq 0 \; \forall x \in K: \|x\| \leq B$)

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei K kp.

Sei (x_k) konvergente Folge in K, $x = \lim_{k\to\infty} x_k$

$\Rightarrow$ auch jede Teilfolge von (x_k) konvergiert gegen x

$\underset{K\ kp.}{\Longrightarrow} \quad x \in K$

somit K abg

indirekt: Annahme K unbeschränkt

$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists x_k \in K: \; \|x_k\| \geq k$

(x_k) hat keine konv. Teilfolge, im Wspr. zu K kp.

somit K beschränkt

($\Leftarrow$) Sei K abg und beschränkt

Sei (x_k) Folge in K. (x_k) beschränkt, daher nach B-W

$\exists$ konv. Teilfolge (x_k'), $\quad x := \lim x_k'$

da K abg., ist $x \in K$

somit K kompakt $\square$

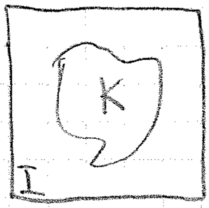
<u>Satz 2:</u> K kompakt

$\iff$ Für <u>jede</u> Familie offener Mengen $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \supset K$

gibt es endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \Lambda$: $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_m} \supset K$

kurz: Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung (<u>Heine-Borel-Eigenschaft</u>)

<u>Beweis:</u> ($\Rightarrow$) (ähnlich bei Satz von Heine über glm. Stetigkeit von stetigem $f: [a,b] \to \mathbb{R}$)



schließe K in n-dim. Würfel ein:

$$K \subset I = [-B, B]^N$$

indirekt: Annahme: brauche unendlich viele λ, um K zu überdecken

unterteile I in 2^n Würfel I_j der halben Seitenlänge:

$$I = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_j$$

mindestens eine der Mengen $K \cap I_j$ benötigt unendl. viele U_λ, um davon überdeckt zu werden

für ein solches j setze $K_1 := K \cap I_j$

unterteile I_j wieder in 2^n kleinere Würfel, usw.

erhalte Folge von Mengen $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$,

von denen jede unendl. viele U_λ braucht, um überdeckt zu werden

wähle $x_k \in K_k$ bel.

(x_k) ist Cauchy-Folge, da Durchmesser von K_k gegen 0:

$$\operatorname{diam}(K_k) = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in K_k\} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

nach Cauchy' Konv.kriterium: (x_k) konvergent, $a := \lim x_k$

da K abg. (nach S.1), ist $a \in K$

nach VS $\exists \lambda \in \Lambda : a \in U_\lambda$

U_λ offen $\Longrightarrow$ $\exists \delta > 0 : B_\delta(a) \subset U_\lambda$

da $\operatorname{diam}(K_k) \to 0$, gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $K_m \subset B_\delta(a) \subset U_\lambda$

somit: K_m wird durch ein einziges U_λ überdeckt, Wspr.!

($\Leftarrow$) Sei (x_k) Folge in K

Annahme: (x_k) habe keine in K konvergente Teilfolge

$\Rightarrow$ Jedes $x \in K$ hat eine offene Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Folgenglieder enthält

klar: $K \subset \bigcup_{x \in K} U(x)$

nach VS $\exists \xi_1, \dots, \xi_m \in K : K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U(\xi_j)$

$\Rightarrow$ K enthält nur endlich viele Folgenglieder

$\Rightarrow$ $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ endl. $\Rightarrow$ (x_k) hat konstante Teilfolge, Wspr.!